

Zéros des fonctions L et formes toriques

Gilles Lachaud ^a

^a Institut de Mathématiques de Luminy, Luminy Case 907, 13288 Marseille cedex 9 - FRANCE
Courriel : lachaud@iml.univ-mrs.fr

(Reçu le 06/05/2002, accepté le 21/05/2002)

Résumé. À partir d'un corps de nombres K de degré n , on définit un tore maximal T de $G = GL_n$. Si χ est un caractère du groupe des classes d'idèles de K , satisfaisant des conditions adéquates, les formes toriques pour χ sont les fonctions sur $G_{\mathbb{Q}}Z_{\mathbb{A}} \backslash G_{\mathbb{A}}$, dont le coefficient de Fourier correspondant à χ par rapport au sous-groupe induit par T est nul. L'hypothèse de Riemann pour $L(s, \chi)$ est équivalente à des conditions portant sur certains espaces de formes toriques, construits à partir des séries d'Eisenstein. Enfin, on construit un espace de Hilbert et un opérateur auto-adjoint sur cet espace, dont le spectre est égal à l'ensemble des zéros de $L(s, \chi)$ sur la droite critique. © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Zeroes of L -functions and toric forms

Abstract. An algebraic number field K defines a maximal torus T of the linear group $G = GL_n$. Let χ be a character of the idele class group of K , satisfying suitable assumptions. The χ -toric form are the functions defined on $G_{\mathbb{Q}}Z_{\mathbb{A}} \backslash G_{\mathbb{A}}$ such that the Fourier coefficient corresponding to χ with respect to the subgroup induced by T is zero. The Riemann hypothesis is equivalent to certain conditions concerning some spaces of toric forms, constructed from Eisenstein series. Furthermore, we define a Hilbert space and a self-adjoint operator on this space, whose spectrum equals the set of zeroes of $L(s, \chi)$ on the critical line. © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

1. Introduction

Soient K un corps global et χ un caractère du groupe C_K des classes d'idèles de K (voir [6]). Dans [3], A. Connes définit un *espace de Pólya-Hilbert* pour la fonction $L(s, \chi)$ comme un couple formé d'un espace de Hilbert \mathcal{H} et d'un opérateur D de \mathcal{H} , fermé, non borné, à domaine dense, tel que l'on ait

$$\text{Spec } D = \left\{ \gamma \in \mathbb{R} \mid L\left(\frac{1}{2} + i\gamma, \chi\right) = 0 \right\}.$$

Les espaces de Pólya-Hilbert qu'il a construits dans [3], généralisés par C. Soulé [5], sont des espaces L^2 sur le groupe C_K . Il signale qu'il serait souhaitable de clarifier les rapports entre ces espaces et l'*espace des formes toriques* introduit par D. Zagier [8] : c'est ce que nous allons faire ici, en construisant un espace de Pólya-Hilbert à partir des formes toriques et des séries d'Eisenstein.

Note présentée par Alain CONNES

S0764-4442(00)02447-0/FLA

© 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

2. Séries d'Eisenstein

On note \mathbb{A} l'anneau des adèles de \mathbb{Q} , et $G_{\mathbb{A}}$ le groupe des points de $G = \mathbf{GL}_n$ à valeurs dans \mathbb{A} . On note

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} t & tx \\ 0 & g' \end{pmatrix} \right\}$$

le sous-groupe parabolique maximal standard de G de type $(n-1, 1)$, où $g' \in \mathbf{GL}_{n-1}$, où $t \in \mathbf{G}_m = \mathbf{GL}_1$, et où $x \in \mathbf{A}^{n-1}$. Le module de $P_{\mathbb{A}}$ est $\delta_P(p) = |t^{n-1} / \det g'|_{\mathbb{A}}$. On a $G_{\mathbb{A}} = P_{\mathbb{A}}\mathbf{K}$, où \mathbf{K} est le sous-groupe compact maximal usuel de $G_{\mathbb{A}}$. Si $g = p\kappa \in G_{\mathbb{A}}$, avec $p \in P$ et $\kappa \in \mathbf{K}$, on pose $\delta_P(g) = \delta_P(p)$. La série d'Eisenstein normalisée correspondant à P est

$$\mathbf{E}(g, s) = \sum_{\gamma \in P_{\mathbb{Q}} \backslash G_{\mathbb{Q}}} \delta_P(\gamma g)^s, \quad g \in G_{\mathbb{A}}.$$

Cette série converge pour $\operatorname{Re}(s) > 1$ et appartient à l'espace $C(X)$ des fonctions continues définies sur la variété modulaire $X = G_{\mathbb{Q}}Z_{\mathbb{A}} \backslash G_{\mathbb{A}}/\mathbf{K}$, où Z est le centre de G . La série $\mathbf{E}(g, s)$ se prolonge en une fonction méromorphe de s dans \mathbb{C} , satisfait à l'équation fonctionnelle

$$\mathbf{E}(g, s) = c(s) \mathbf{E}({}^t g^{-1}, 1-s), \quad \text{où } c(s) = \xi(n(1-s))/\xi(ns), \quad \xi(s) = \pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s),$$

et si $n = 2$, on a $\mathbf{E}({}^t g^{-1}, s) = \mathbf{E}(g, s)$. Les seuls pôles de la fonction $\xi(ns) \mathbf{E}(g, s)$ sont les points $s = 0$ et $s = 1$. Enfin, si $D = 4/(n(n-1))D_0$, où D_0 est l'opérateur de Casimir de l'algèbre de Lie de G , et si s n'est pas un pôle de $\mathbf{E}(g, s)$, on a $D\mathbf{E}(g, s) = s(1-s) \mathbf{E}(g, s)$.

3. Formes toriques

Soient k un corps de nombres algébriques, et K une extension de degré $n > 1$ de k . On note $\mathbf{T}_{K/k}$ le k -tore de dimension n représentant le groupe multiplicatif de K , tel que $\mathbf{T}_{K/k}(k') = (K \otimes_k k')^{\times}$ si k' est une k -algèbre. Soient \mathfrak{o} l'anneau des entiers de k , et \mathfrak{O} l'anneau des entiers de K . Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ une base fondamentale de K sur k , c'est-à-dire une base du \mathfrak{o} -module \mathfrak{O} , avec $\alpha_1 = 1$; une telle base existe toujours si \mathfrak{o} est principal. On définit la représentation régulière droite π de $\mathbf{T}_{K/k}$ dans l'espace affine \mathbb{A}_k^n de la manière suivante : si k' est une k -algèbre et si $\xi \in \mathbf{T}_{K/k}(k')$, on note $\rho(\xi)$ la multiplication par ξ , et on pose

$${}^t \pi(\xi).u = \iota^{-1} \circ \rho(\xi) \circ \iota(u), \quad \text{où } u = (u_1, \dots, u_n) \in k'^n \text{ et } \iota(u) = u_1 \alpha_1 + \dots + u_n \alpha_n \in \mathbf{T}_{K/k}(k').$$

La représentation π induit un isomorphisme de $\mathbf{T}_{K/k}$ sur un tore maximal non déployé T de G . On note $C_K = K^{\times} \backslash \mathbb{A}_K^{\times}$ le groupe des classes d'idèles de K . La représentation π induit un isomorphisme

$$C_k \backslash C_K \xrightarrow{\sim} T_k Z_{\mathbb{A}_k} \backslash T_{\mathbb{A}_k}.$$

Le groupe Cl_K des classes de K est fini. Le groupe $T_k Z_{\mathbb{A}_k} \backslash T_{\mathbb{A}_k}$ est compact, extension de $\operatorname{Cl}_k \backslash \operatorname{Cl}_K$ par un tore topologique (un produit de cercles) de dimension $n-1$. On note X le groupe discret des caractères de

$$K^{\times} \mathbb{A}_k^{\times} \backslash \mathbb{A}_K^{\times} / U \cong T_k Z_{\mathbb{A}_k} \backslash T_{\mathbb{A}_k} / U_T,$$

où U (resp. U_T) est le sous-groupe compact maximal de \mathbb{A}_K^{\times} (resp. de $T_{\mathbb{A}_k}$); ces caractères sont non ramifiés en toute place finie de K . Si $k = \mathbb{Q}$, et si on note r_1 et r_2 le nombre de places réelles et imaginaires de K , le groupe X est extension d'un groupe libre de rang $r_1 + r_2 - 1$ par le groupe des caractères de Cl_K . Si $F \in C(X)$, le coefficient de Fourier de F de fréquence $\chi \in X$ est

$$\Pi_{\chi}(F)(g) = \int_{T_k Z_{\mathbb{A}_k} \backslash T_{\mathbb{A}_k}} F(hg) \chi_{\pi}(h) dh, \quad \text{où } \chi_{\pi} = \chi \circ \pi^{-1},$$

et on dit que $F \in C(X)$ est une *forme torique en χ* si $\Pi_\chi(F)(g) = 0$ pour tout $g \in G_\mathbb{A}$; on note $T_\chi(X)$ l'espace de ces formes, qui ont été introduites par D. Zagier [8] lorsque $n = 2$ et $\chi = 1$. Soit ξ un élément primitif de K , et c la classe de conjugaison de $\pi(\xi)$ dans G_k . Pour que $F \in C(X)$ soit torique pour le caractère $\chi = 1$, il faut et il suffit que l'on ait

$$\int_{G_{\mathbb{Q}}Z_{\mathbb{A}} \backslash G_{\mathbb{A}}} F(g) u_c(g) dg = 0, \quad \text{où} \quad u_c(g) = \sum_{\gamma \in c} u(g^{-1}\gamma g)$$

est la *série orbitale* d'une fonction $u \in C_c(Z_{\mathbb{A}_k} \backslash G_{\mathbb{A}_k} / \mathbf{K})$ suffisamment régulière, auquel cas u_c est à support compact sur X . La *formule de Hecke* (voir par ex. [7]) montre que $E(g, s)$ est torique en χ si $L(s, \chi) = 0$, plus précisément :

PROPOSITION 1. – *Supposons $k = \mathbb{Q}$. Si $\chi \in \mathcal{X}$ et si $g \in G_{\mathbb{A}}$, posons*

$$\int_{T_{\mathbb{Q}}Z_{\mathbb{A}} \backslash T_{\mathbb{A}}} \mathbf{E}(hg, s) \chi_\pi(h) dh = L(s, \chi) H(g, s, \chi).$$

La fonction $\xi(ns) H(g, s, \chi)$ est holomorphe dans le demi-plan $\text{Re}(s) > 0$, et il existe $g_K \in G_{\mathbb{A}}$ tel que $\xi(ns) H(g_K, s, \chi)$ ne s'annule pas dans \mathbb{C} .

4. Trains d'ondes d'Eisenstein

Un *train d'ondes d'Eisenstein (fini)* (ou *train d'ondes* pour simplifier) est une combinaison linéaire de séries d'Eisenstein. Plus précisément, l'espace $E(X)$ de ces trains d'ondes est formé des fonctions qui s'écrivent

$$W(\mu)(g) = \int_B \mathbf{E}(g, s) d\mu(s) \quad (g \in G_{\mathbb{A}}),$$

où μ appartient à l'espace $\mathcal{M}_n(B)$ des mesures dans la bande ouverte $B = \{s \in \mathbb{C} \mid 0 < \text{Re}(s) < 1\}$, et à support fini, disjoint de l'ensemble des pôles de $\mathbf{E}(g, s)$ dans B . Lorsque $n = 2$, on note $\mathcal{M}_2^+(B)$ le sous-espace de $\mathcal{M}_2(B)$ formé des mesures telles que $\mu(1-s) = c(s) \mu(s)$. Si $F \in E(X)$ et si $n \geq 3$ (resp. si $n = 2$), il existe une unique mesure μ de $\mathcal{M}_n(B)$ (resp. de $\mathcal{M}_2^+(B)$) telle que $F = W(\mu)$; on dit que le support de μ est le *spectre* de F , noté $\text{Spec } F$. On déduit de la proposition 1 :

THÉORÈME 1. – *Soit $\chi \in \mathcal{X}$. Pour que $F \in E(X)$ soit torique en χ , il faut et il suffit que*

$$\text{Spec } F \subset \{s \in B \mid L(s, \chi) = 0\}.$$

On dit qu'un train d'ondes est *principal* si son spectre est contenu dans la *droite critique* D d'équation $\text{Re}(s) = 1/2$, et on note $E^1(X)$ l'espace des trains d'ondes principaux. Le théorème 1 implique que les racines de $L(s, \chi)$ dans B sont situées sur D si et seulement si tout train d'ondes d'Eisenstein torique en χ est principal.

J. Arthur [1, p. 89] a défini un *opérateur de troncature* Λ^T sur l'espace $C(X)$, où T est un élément convenable de l'algèbre de Lie du tore maximal standard de G . Si H est l'élément tel que $\langle \alpha, H \rangle = 1$ pour toute racine simple α de G , on peut prendre $T = (\log m)H$ si $m > 0$ est assez grand; on pose $\Lambda^m = \Lambda^T$. On note $A^2(X)$ l'espace préhilbertien des $F \in C(X)$ telles que

$$\|F\|_2^2 = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{4 \log m} \int_{G_{\mathbb{Q}}Z_{\mathbb{A}} \backslash G_{\mathbb{A}}} |\Lambda^m F(g)|^2 dg < +\infty,$$

et $A^2(X)$ l'espace de Hilbert séparé complété de $A^2(X)$. On déduit des *relations de Maass-Selberg* (cf. par ex. [4, p. 401]) si $n = 2$, et de leur généralisation par J. Arthur [2, p. 70] si $n \geq 3$:

PROPOSITION 2. – *Si F est un train d'ondes principal non nul, alors $0 < \|F\|_2 < +\infty$, autrement dit $E^1(X) \subset A^2(X)$; si $n = 2$, on a $E^1(X) = E(X) \cap A^2(X)$.*

THÉORÈME 2. – Soit $\chi \in X$. Considérons les conditions suivantes :

1. Les racines de $L(s, \chi)$ dans la bande B sont situées sur la droite critique.
2. Si $s \in B$ et si $\mathbf{E}(g, s)$ est torique en χ , on a $\mathbf{E}(pg, s) = O(\delta_P(p)^{1/2})$ pour tout $p \in P_{\mathbb{A}}$, uniformément lorsque g parcourt un compact de $G_{\mathbb{A}}$.
3. Tout train d'ondes torique en χ appartient à $\mathcal{A}^2(X)$.

On a (1) \Leftrightarrow (2) \Rightarrow (3). Si $n = 2$, les conditions (1), (2), (3) sont équivalentes.

5. Un espace de Pólya-Hilbert modulaire

On note $T_{\chi}^2(X)$ l'espace de Hilbert qui est l'adhérence de $E^1(X) \cap T_{\chi}(X)$ dans $A^2(X)$. On note D_{χ} l'opérateur non borné de $T_{\chi}^2(X)$ défini par l'opérateur de Casimir D de G (normalisé comme ci-dessus) dont le domaine est le complété de $E^1(X) \cap T_{\chi}(X)$ pour la norme $\|DF\|_2$.

THÉORÈME 3. – L'opérateur D_{χ} est un opérateur auto-adjoint de $T_{\chi}^2(X)$, et on a

$$\text{Spec } D_{\chi} = \left\{ \lambda \mid \lambda = \frac{1}{4} + \gamma^2, \quad \gamma \in \mathcal{Y} \right\} \quad \text{où} \quad \mathcal{Y} = \left\{ \gamma \in \mathbb{R} \mid L\left(\frac{1}{2} + i\gamma, \chi\right) = 0 \right\}.$$

Si $L(1/2, \chi) = 0$, la valeur propre $\lambda = 1/4$ est simple. Si $n \geq 3$, toute valeur propre $\lambda \neq 1/4$ est double, les fonctions propres étant $\mathbf{E}(g, 1/2 \pm i\gamma)$. Si $n = 2$, toute valeur propre est simple.

Autrement dit, le couple $(T_{\chi}^2(X), D_{\chi})$ est un espace de Pólya-Hilbert pour la fonction $L(s, \chi)$ (mis à part le changement de variables de γ à λ). On notera que le spectre de D_{χ} prend en compte les zéros des fonctions $L(s, \chi)$ avec une multiplicité uniforme. Or ces fonctions ont des racines multiples en général ; toutefois, ce point de vue semble compatible avec la conjecture de simplicité de Serre suivant laquelle les zéros de $L(s, \chi)$ dans la bande B sont simples si χ est cette fois-ci un caractère galoisien irréductible.

On note $\mathfrak{A}(G)$ l'algèbre de Hecke des fonctions $u \in C_c(Z_{\mathbb{A}} \backslash G_{\mathbb{A}})$ bi-invariantes sous \mathbf{K} et $R(u)$ la représentation régulière droite de $\mathfrak{A}(G)$ dans $C(X)$. Si $u \in \mathfrak{A}(G)$, on a $R(u)\mathbf{E}(g, s) = \tilde{u}(s)\mathbf{E}(g, s)$, où on a introduit la fonction entière

$$\tilde{u}(s) = \int_{Z_{\mathbb{A}} \backslash G_{\mathbb{A}}} \delta_P(g)^s u(g) dg;$$

on en déduit une représentation $R_{\chi}(u)$ de $\mathfrak{A}(G)$ dans $T_{\chi}^2(X)$.

COROLLAIRE . – Si $u \in \mathfrak{A}(G)$, on a

$$\text{Trace } R_{\chi}(u) = \sum_{\gamma \in \mathcal{Y}} \tilde{u}\left(\frac{1}{2} + i\gamma\right),$$

où la sommation ne porte que sur les $\gamma \geq 0$ si $n = 2$.

Références bibliographiques

- [1] Arthur, J., A Trace Formula for Reductive groups II : Applications of a Truncation Operator, *Compositio Math.* 40 (1980), 87–121.
- [2] Arthur, J., On the inner product of truncated Eisenstein series, *Duke Math. J.* 49 (1982), 35–70.
- [3] Connes, A., Trace formula in noncommutative geometry and the zeros of the Riemann zeta function, *Sel. Math., New Ser.* 5 (1999), 29–106.
- [4] Knapp, A.W., Theoretical aspects of the Trace formula for $GL(2)$, *Proc. Symp. Pure Math.* 61 (1997), 355–405.
- [5] Soulé, C. Sur les zéros des fonctions L automorphes, *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I*, 328 (1999), 955–958.
- [6] Weil, A., *Basic Number Theory*, *Grund. math. Wiss. Einzel., Band 144*, Springer, Berlin, 1967.
- [7] Wielonsky, F., Séries d'Eisenstein, intégrales toroidales et une formule de Hecke, *Enseign. Math.* 31 (1985), 93–135.
- [8] Zagier, D., Eisenstein Series and the Riemann zeta function, in : *Automorphic Forms, representation theory and arithmetic*, *Tata Inst. Fund. Res. Studies in Math.* 10, T.I.F.R., Bombay, 1981, pp. 275–301.