QU'EST-CE QU'UNE ÉQUATION ?

GILLES LACHAUD

paru dans Notions*, Encyclopædia Universalis, 2004*

Une équation est une égalité entre deux expressions mathématiques. C'est donc une formule, une relation de la forme $A = B$, où les deux membres A et B sont des expressions où figurent une ou plusieurs variables, représentées par des lettres. Par extension, une équation conduit à un problème, qui consiste à poser la question : à quelles conditions deux expressions sont-elles égales ? *Résoudre* une équation consiste à déterminer ses *solutions*, qui sont les valeurs des variables (que l'on ne connait pas *a priori*, d'où le nom d'*inconnues* données aux variables) pour lesquelles l'équation est vérifiée lorsqu'on substitue ces valeurs aux variables.

Plus concrètement, une équation est une égalité $f(x) = g(x)$, où on prend pour A et B deux fonctions définies sur un ensemble X et à valeurs dans un ensemble Y. Une équation peut n'avoir aucune solution, comme par exemple l'équation $x + 1 = x$ dans l'ensemble des nombres entiers ; si elle en a une, elle peut en avoir plusieurs, ou une infinité. Une équation qui est vérifiée quelles que soient les valeurs des variables, comme $x + 0 = x$ par exemple, est une *identité*. La conjonction de plusieurs équations qui doivent être vérifiées simultanément est un *système d'équations*.

Équations algébriques. — Ce sont les équations dont chaque terme est un *polynôme*, c'est-à-dire une expression obtenue en additionnant et en multipliant entre elles des nombres et des variables (par contre, si les termes comportent des fonctions transcendantes, on dit que l'équation est *transcendante*). La nature du problème de la résolution d'une équation algébrique dépend profondément de l'ensemble où on cherche les solutions : nombres entiers, nombres rationnels (c'est-à-dire les fractions de signe quelconque), nombres réels ou complexes, fonctions, etc.

Les équations algébriques les plus simples sont les *équations linéaires* à une variable, comme l'équation $2x = 3$ par exemple ; elles ont été introduites et étudiées depuis la haute antiquité, et leur résolution a conduit à l'introduction des fractions. Les systèmes de deux équations linéaires à deux variables x et y, sont tout aussi anciens. Par exemple, le système d'équations linéaires

$$\begin{aligned} x + y &= a, \\ x - y &= b, \end{aligned}$$

où a et b sont des nombres donnés, a pour solutions

$$x = \frac{a+b}{2}, \quad y = \frac{a-b}{2}.$$

L'étude des systèmes d'équations linéaires est le domaine de l'algèbre linéaire.

Les *équations polynômiales* sont les équations algébriques à une variable, de la forme $f(x) = 0$, où

$$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots$$

est un polynôme à une variable : les *coefficients* $a, b, \dots$ sont des nombres donnés. Si a n'est pas nul, on dit que f est de degré n. On parle d'équation quadratique, cubique, quartique, ... pour les équations de degré $2, 3, 4, \dots$ Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont aussi appelées les *racines* ou les *zéros* de f; en particulier, une racine n-ième de a est une solution de l'équation $x^n = a$. Le théorème fondamental de l'algèbre garantit qu'une équation de degré n a exactement n solutions dans le corps des nombres complexes, en tenant compte de la multiplicité de chaque racine.

Les équations du second degré n'ont pas de solutions en nombres rationnels en général. C'est le cas, par exemple, de l'équation $x^2 - 2 = 0$, et c'est ce qui a conduit les mathématiciens de la Grèce ancienne à introduire les nombres irrationnels, comme $\sqrt{2}$, qui est une solution de cette équation. De la même manière, l'équation $x^2 = -1$ n'a aucune solution en nombres réels ; c'est ce qui a conduit à introduire les nombres complexes ou imaginaires, comme le nombre i, qui est une solution de cette équation. L'équation générale du second degré s'écrit $ax^2+bx+c = 0$; le principe de résolution a été donné par al-Khwārizmī vers l'an 800 de notre ère. Ses solutions sont

$$x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a},$$

où on a choisi une racine carrée (éventuellement complexe) du *discriminant* $\Delta = b^2 - 4ac$. Les solutions d'une équation du troisième degré sont données par des formules de Viète et de Cardan ; pour les calculer, il faut extraire une racine carrée et une racine cubique. Le solutions d'une équation du quatrième degré s'expriment encore en extrayant des racines, mais Abel et Galois ont démontré que l'équation générale du cinquième degré (et aussi des degrés plus élevés) ne peut pas être résolue par radicaux. C'est une conséquence de la théorie de Galois.

Newton a donné une méthode de calcul approché des solutions en nombres réels d'une équation de la forme $f(x) = 0$, où $f(x)$ est une fonction de variable reélle. La méthode s'applique aussi aux équations transcendantes.

Équations algébriques à plusieurs variables. — Voici un exemple d'équation de ce type. Dans un triangle rectangle, on sait, grâce au théorème de Pythagore, que le carré de la longueur z de l'hypothénuse est égal à la somme des carrés des longueurs x et y des deux autres côtés ; ceci revient à dire que les trois nombres x, y, z satisfont *l'équation de Pythagore*, c'est-à-dire l'équation quadratique à trois variables

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Une solution est fournie par les nombres $3, 4, 5$. Cette équation a en fait une infinité de solutions : la solution générale se trouve dans les Éléments d'Euclide et s'exprime en fonction de deux paramètres u et v :

$$x = u^2 - v^2, \quad y = 2uv, \quad z = u^2 + v^2.$$

D'autre part, les équations à deux variables interviennent en géométrie : en coordonnées cartésiennes, un point du plan est représenté par un couple $P = (x, y)$ de nombres réels, où x est l'abscisse de P et où y est son ordonnée. Si $f(x, y)$ est une fonction à deux variables, suffisamment régulière, l'ensemble (ou *lieu*) des points $P = (x, y)$ tels que $f(x, y) = 0$ est une courbe tracée dans le plan. Lorsque $f(x, y)$ est un polynôme à deux variables, on dit que c'est une courbe algébrique. Une droite est donnée par une équation du premier degré

$$ax + by + c = 0,$$

et un cercle par une équation du second degré : par exemple, le cercle de centre 0 et de rayon r a pour équation $x^2 + y^2 = r^2$. Outre le cercle, les figures du plan obtenues par une équation générale du second degré sont les paraboles, les hyperboles et les ellipses. Les figures du plan obtenues par une équation générale du troisième degré sont les courbes cubiques. Pour ces courbes, on peut se ramener à une équation du type

$$y^2 = x^3 + px + q.$$

Ces courbes portent le nom de courbes elliptiques car cette équation intervient dans le calcul de la longueur d'un arc d'ellipse. Les courbes elliptiques sont utilisées dans le traitement de l'information pour construire des protocoles de cryptographie.

Équations diophantiennes. — Ainsi nommées du nom de Diophante d'Alexandrie, qui vivait probablement vers l'année 250 de notre ère. Ce sont les équations algébriques à plusieurs variables et à coefficients entiers, dont on cherche les solutions *en nombres entiers, ou bien en nombres rationnels.* Comme il y a plusieurs variables, on leur donne parfois le nom ambigu d'*équations indéterminées.* Si on considère l'équation de Pythagore comme une équation diophantienne, on obtient les solutions en nombres entiers en donnant des valeurs entières aux paramètres u et v de la solution décrite plus haut. Dans son livre *Les Arithmétiques*, Diophante énonce plusieurs centaines de problèmes de ce type ; pour chacun d'eux il donne un algorithme fournissant une solution du problème en nombres rationnels.

L'équation de Pythagore a conduit Pierre de Fermat, au XVII^{e} siècle, à considérer plus généralement l'équation suivante, où n est un entier ≥ 3 :

$$x^n + y^n = z^n,$$

et où les nombres x, y, z sont des entiers non nuls. Il a démontré que cette équation n'avait aucune solution lorsque $n = 4$, et il a aussi écrit, sans laisser de démonstration, qu'il n'y en avait pas non plus pour les autres valeurs de n. C'est ce que l'on a appelé *le grand théorème de Fermat*, bien que Fermat ne l'ait jamais démontré ! Il a fallu attendre trois siècles : en 1994, Andrew Wiles en a donné une démonstration qui utilise des résultats profonds sur les courbes elliptiques. C'était l'aboutissement d'un effort soutenu mené les plus grands chercheurs sur le sujet.

La nature d'une équation diophantienne $f(x, y) = 0$ à deux variables est très différente suivant que l'on recherche des solutions en nombres rationnels ou bien en nombres entiers. La complexité de cette équation se mesure par le degré de f, mais aussi, et plus précisément par un nombre entier appelé le *genre* de la courbe définie par l'équation : les droites et les coniques sont de genre zéro, les courbes elliptiques sont de genre un. S'il en existe, on peut facilement calculer les solutions rationnelles d'une équation de genre zéro ; et les solutions d'une équation de genre un se déduisent d'un nombre fini d'entre elles. En revanche, les équations définissant une courbe de genre au moins égal à deux, comme la suivante :

$$y^4 = x^3 + px + q,$$

(de genre 3 en général) n'ont qu'un nombre fini de solutions en nombres rationnels, comme Gerd Faltings l'a démontré en 1983.

La recherche des solutions en nombres entiers est souvent liée à des questions d'approximation. Par exemple, l'équation de Pell

$$x^2 - Dy^2 = 1$$

où D est un entier naturel qui n'est pas un carré, a une infinité de solutions ; en divisant par y^2, on voit que les nombres x/y fournissent une approximation de la racine carrée de D lorsque y est de plus en plus grand.

Il n'existe pas d'algorithme universel permettant de déterminer si une équation diophantienne avec un degré et un nombre de variables arbitraires a une solution en nombres entiers, comme Youri Matiyasevitch l'a démontré en 1970.

Équations en analyse. — En mécanique et en physique mathématique, l'étude des phénomènes naturels conduit à définir des fonctions décrivant l'état d'un système ; la nature du système définit des équations régissant ces fonctions.

Les *équations différentielles* sont des équations dont les coefficients et les variables sont elles-mêmes des fonctions, et dont les termes contiennent les dérivées de cette fonction ainsi que la fonction elle-même. Les *équations différentielles ordinaires* impliquent des fonctions d'une seule variable $y(x)$ et ses dérivées $y'(x), y"(x)$, etc. ; l'ordre d'une telle équation est l'ordre de la plus haute dérivée qu'elle contient. Il y a des critères d'existence et d'unicité pour les solutions d'une équation différentielle ordinaire, c'est le théorème d'existence de Cauchy, basé sur le calcul des approximations successives développé par Picard. Une équation différentielle est *linéaire* si elle dépend linéairement des dérivées ; par exemple, une équation différentielle du second ordre est de la forme

$$a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = f(x),$$

et on dit qu'elle est *homogène* si $f(x) = 0$. Pour une telle équation, toute combinaison linéaire de solutions est encore une solution, et elle admet n solutions linéairement indépendantes. Lorsque les coefficients sont constants, ces équations sont résolues en utilisant des méthodes d'algèbre linéaire.

Dans les *équations aux dérivées partielles*, les inconnues sont des fonctions de plusieurs variables, elles impliquent la fonction et ses dérivées partielles. L'étude de ces équations fait l'objet de l'une des branches contemporaines les plus importantes des mathématiques, l'*analyse fonctionnelle*. Le *Laplacien* Δf (du nom de Pierre-Simon Laplace) d'une fonction à plusieurs variables est la somme de ses dérivées partielles secondes. Pour une fonction $f(x, y)$, où (x, y) varient dans une partie du plan, on a

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

et l'*équation de Laplace* est $\Delta f = 0$. Ses solutions sont les fonctions harmoniques ; elles interviennent dans les problèmes physiques impliquant le champ électromagnétique ou gravitationnel, et dans certains problème de mécanique des fluides. Pour une fonction $f(t, x, y)$, où t est la variable de temps, l'*équation des ondes* est

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \Delta f$$

et l'*équation de la chaleur* est

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \Delta f.$$

L'*équation de Schrödinger* de la mécanique quantique s'écrit, pour une fonction indépendante du temps,

$$\Delta f + V f = \lambda f,$$

où V est une fonction (le potentiel), et où λ est un nombre correspondant à un niveau d'énergie.