

# Sommes de diviseurs et hypothèse de Riemann

Patrick Solé

La fonction arithmétique somme de diviseurs  $\sigma(n) := \sum_{d|n} d$  a attiré l'attention par le critère de Lagarias [2] pour l'hypothèse de Riemann (RH). RH est vraie si pour tout  $n \geq 1$ , on a

$$\sigma(n) \leq h(n) + e^{h(n)} \log(h(n)),$$

où  $h(n) := \sum_{k=1}^n 1/k$  est la série harmonique. Ce critère dépend lui-même d'un critère de Guy Robin [3] RH est vraie ssi pour tout  $n \geq 5041$ ,

$$\sigma(n) \leq e^\gamma n \log \log n,$$

où  $\gamma$  désigne la constante d'Euler-(Mascheroni). Nous donnons des résultats récents [1] qui montrent que ce critère est satisfait pour au moins 70% des entiers naturels, un panorama des résultats classiques (Euler, Ramanujan, etc) sur  $\sigma$ , ainsi que des résultats moins connus (non-holonomicité).

## References

- [1] Y.-J. Choie, N. Lichiardopol, P. Moree, P. Solé, On Robin's criterion for the Riemann Hypothesis, available from ArXiv or [www.polytech.unice.fr/~sole/index2.html](http://www.polytech.unice.fr/~sole/index2.html).
- [2] Jeffrey C. Lagarias, An elementary problem equivalent to the Riemann hypothesis, *Amer. Math. Monthly* **109** (2002), 534–543.
- [3] Guy Robin, Grandes valeurs de la fonction somme des diviseurs et hypothèse de Riemann, *J. Math. Pures Appl.* (9) **63** (1984), 187–213.

*CNRS-I3S, Polytech'Nice, 930 route des Colles, 06903 Sophia Antipolis, France*  
*email: [sole@essi.fr](mailto:sole@essi.fr)*

*web: <http://www.polytech.unice.fr/~sole/index2.html>*