# EXTENSIONS ASYMPTOTIQUEMENT EXACTES ET RAMIFICATION SAUVAGE

CHRISTIAN MAIRE

Les résultats présentés dans ce papier se trouvent en partie dans [1].

Dans tout ce qui suit, $K$ dénotera un corps de nombres de degré $n$ sur , $\emptyset_K$ son anneau d'entiers, $\mathrm{disc}_K$ le discriminant de cet anneau. La racine du déterminant de $K$, ou encore le "root discriminant" de $K$, notée $\mathrm{rd}_K$, est par définition la racine $n$-ème de $|\mathrm{disc}_K|$.
Si $L/$ est une extension algébrique, il est encore possible de définir le "root discriminant" de $L$ :

**Définition 1.** *Le "root discriminant"* $\mathrm{Rd}_L$ *de $L$ est le sup des "root discriminant"* $\mathrm{Rd}_K$ *des corps de nombres $K$ contenus dans $L$.*

Bien évidemment, on a

**Proposition 2.** *Si $L/$ est finie,* $\mathrm{Rd}_L = \mathrm{rd}_L$.

Donnons quelques évidences :

**Proposition 3.**
*1) Si $L/L'$ est non-ramifiée,* $\mathrm{Rd}_L = \mathrm{Rd}_L$ .
*2) Si $L/K$ est non-ramifiée en dehors d'un ensemble fini $S$ de places de $K$, et si de plus la ramification en $S$ est modérée, alors*

$$\mathrm{Rd}_L \leq \mathrm{Rd}_K \left( \prod_{\in S} N_{K/} \right)^{1/n}$$

*3) S'il y a une infinité de premiers de $K$ qui se ramifient dans une extension galoisienne $L/K$, alors* $\mathrm{rd}_L = \infty$.
*4) Si $L$ contient une $_p$-extension de corps de nombres,* $\mathrm{Rd}_L = \infty$.

On en arrive à la définition d'extension asymptotiquement exacte :

**Définition 4.** *L'extension algébrique $L/K$ est aymptotiquement exacte, si et seulement si :*

1. *les prolongements à $L$ des plongements réels de $K$ restent réels*
2. *$L/$ est infinie*
3. $\mathrm{Rd}_L < \infty$

Cette notion d'extension asymptotiquement exacte apparait dans divers papiers. Par exemple, dans un travail de Martinet [4], qui donne des informations sur les minorations asymptotiques des valeurs absolues des discriminants de corps de nombres. Ou encore dans des travaux de Litsyn-Tsfasman [2], sur les densités asymptotiques de réseaux, ou encore dans des travaux de Tsfasman-Vladut [6], sur le théorème de Brauer-Siegel.
Traditionnellement, la construction d'extensions asymptotiquement exactes résulte de l'étude d'extensions non-ramifiées ou modérément ramifiées. Ici, nous tentons d'introduire de la ramification sauvage et regardons les difficultés qui apparaissent. A noter que Shirai [5] et Perret [3] ont aussi regardé de telles extensions.

## 1. La fonction $\nu$

Soit $\nu$ une fonction définie sur l'ensemble des places finies $\mathrm{Pl}_K^0$ de $K$, à valeurs dans $[0,\infty]$, et à support fini $S$. On dira que $\nu$ est finie si $\infty \notin \mathrm{Im}(\nu)$.
A partir de cette fonction, nous définissons :

**Définition 5.** *Soit un nombre premier $p$.*
*Nous noterons par $K_\nu$, la $p$-extension maximale de $K$, telle que :*

1. *les plongements réels de $K$ restent réels dans $K_\nu$,*
2. *pour toutes places finies de $K$, le groupe de ramification à notation supérieure $G^{(\nu(\;))}(K_{\nu,}\,/K\;)$ est trivial.*

*Soit $G_\nu = Gal(K_\nu/K)$.*

Il vient immédiatement quelques remarques :
1) On peut supposer, sans restriction, que pour $|p$, avec $\in S$, $\nu(\;) > 1$, puis que pour dans $S$, étranger à $p$, $N_{K/}\;\; p - 1 \equiv 0 \pmod{p}$ et $\nu(\;) = 1$.
2) Si $\nu \equiv 0$, $K_\nu$ est la $p$-tour de Hilbert de $K$.

3) Avec les conventions de 1), si $\mathrm{Im}(\nu) \subset \{0, 1, \infty\}$, $K_\nu = K_S$ est la $p$-extension maximale de $K$ non-ramifiée en dehors de $S$.
4) La tour définie par Perret est contenue dans $K_\nu$, pour $\nu$ finie.

L'intérêt de $K_\nu$ est le suivant :

**Théorème 6.**
*Supposons $\nu$ finie. Alors* $\mathrm{Rd}_{K}$ *est fini.*
*On a précisément :*

$$\mathrm{Rd}_{K} \;\leq \mathrm{Rd}_K \cdot A(\nu)^{1/n},$$

*où* $A(\nu) = \prod_{|\not p} N_{K/}^{\quad \nu(\;)} \cdot \prod_{|p \;\&\; \in S} N_{K/}^{\quad \nu(\;)+1}.$

Pour l'étude de l'infinitude de $K_\nu/K$, on utilise généralement le théorème de Golod-Shafarevich. Celui-ci donne une condition suffisante pour qu'un pro-$p$-groupe $G$ soit infini :

**Théorème 7.** *Si $G$ un $p$-groupe alors,*

$$d_p \; H^2(G, \;_p) > d_p \; H^1(G, \;_p)^2/4.$$

Dans notre situation $d_p \; H^1(G_\nu, \;_p)$ se calcule, ainsi nous avons à étudier $d_p \; H^2(G_\nu, \;_p)$.

## 2. $G_\nu$ ET SON NOMBRE MINIMAL DE RELATIONS

Rappelons tout d'abord le résultat bien connu de Koch-Shafarevich.

**Théorème 8.** *Si* $\mathrm{Im}(\nu) \subset \{0, 1, \infty\}$,

$$\chi_2(G_\nu) \leq 1 + r_1 + r_2 - \sum_{|p \;\&\; \in S} [K \;:\; _p],$$

*où $\chi_2(G_\nu)$ est la caractéristique d'Euler de $G_\nu$ tronquée en 2.*

La situation semble beaucoup plus compliquée pour le cas général. En particulier, la borne supérieure de $\chi_2(G_\nu)$ dépend de $\mathrm{Im}(\nu)$ et pas seulement de $S$, comme le montre le théorème suivant :

**Théorème 9.**
*Soient* $d \equiv 7 \pmod{16}$ *un premier et* $K = (\sqrt{-d})$.
*On a la décomposition suivante:* $2\o_K = {}_1 {}_2$.
*Soit la fonction* $\nu_{i,j}$ *de support* $S = \{ {}_1, {}_2\}$, *définie par* $\nu_{i,j}({}_1) = i$ *et* $\nu_{i,j}({}_2) = j$ *pour* $i, j > 1$.
*Alors*

$$\sup_j \chi_2(G_\nu) = \infty.$$

## 3. $G_\nu$ et la Conjecture de Fontaine-Mazur

**Définition 10.** *1) Un pro-p-groupe* $G$ *est dit p-adique si et seulement si,* $G \hookrightarrow Gl_m({}_p)$, *pour un certain* $m$.
*2) Un pro-p-groupe* $G$ *est dit p-adiquement fini si et seulement si, tout quotient p-adique de* $G$ *est fini.*

Enonçons alors la Conjecture de Fontaine-Mazur.

**Conjecture 11.** *Si le support de* $S$ *est premier à* $p$, $G_\nu$ *est p-adiquement fini.*

On prouve le résultat suivant :

**Théorème 12.** *Si* $\nu$ *est finie, la Conjecture de Fontaine-Mazur implique que* $G_\nu$ *est p-adiquement fini.*

## 4. Problèmes ouverts

Voici quelques questions ouvertes :

1) Trouver un exemple, si possible, où $\nu$ est non finie et $K_\nu/K$ est asymptotiquement exacte (cela signifie que l'on autorise de la ramification sauvage totale en une place au-dessus de $p$).

2) Il existe des exemples où $\chi_2(G_\nu) = \infty$ (cf. [1]). Mais pour ces exemples $\nu$ n'est pas finie.

Ainsi, a-t-on $\chi_2(G_\nu) < \infty$, lorsque $\nu$ est finie ?
Si oui, peut on donner une borne générale (finie) pour $\chi_2(G_\nu)$ ?

3) Si $L/K$ est une pro-$p$-extension qui contient une ${}_p$-extension de corps de nombres, alors $\mathrm{Gal}(L/K)$ n'est pas $p$-adiquement fini.
Il semble donc intéressant de caractériser les pro-$p$-extensions $L/K$ de corps de nombres $K$, pour lesquelles le support des places de $K$ ramifiées dans $L/K$ est fini et $\mathrm{Rd}_L = \infty$.
Par exemple, a-t-on $\mathrm{Rd}_L = \infty$ si et seulement si $L/K$ n'est pas $p$-adiquement fini ?

## References


[1] F. Hajir, C. Maire, *Extensions of number fields with wild ramification of bounded depth*, 2001, preprint.
[2] S.N. Lytsin, M.A. Tsfasman, *Constructive high-dimensional sphere packings*, Duke Math. J. **54** (1987), 147-161.
[3] M. Perret, *Tours ramifiées infinies de corps de classes*, J. Number Theory **38** (1991), 300-322.
[4] J. Martinet, *Tours de corps de classes et estimations de discriminants*, Invent. Math. **44** (1978), 65-73.
[5] S. Shirai, *On the central class field mod m of Galois extensions of an algebraic number field*, Nagoya Math. J. **71** (1978), 61-85.
[6] M.A. Tsfasman, S.G. Vladut, *Asymptotic properties and generalized Brauer-Siegel thoerem*, 1999, preprint.



DMA, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 1015 Lausanne, Suisse

Labo A2X, Université Bordeaux I, Cours de la Libération, 33400 Talence, France
*E-mail address*: `christian.maire@epfl.ch`