

UNIVERSITÉ DE TOULON

*Master de Mathématiques - M1 MEEF*

# Algèbre Linéaire

## Exercices

2021-2022

Yves Aubry

5 janvier 2022

**Exercice 1.** *Considérons les éléments  $z_1 = 2 + 3i$  et  $z_2 = 1 - i$  de  $\mathbb{C}$ .*

1. *Dans le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $\mathbb{C}$ , la famille  $\{z_1, z_2\}$  est-elle libre ? I.e. les vecteurs  $z_1$  et  $z_2$  sont-ils  $\mathbb{C}$ -linéairement indépendants ?*
2. *Dans le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathbb{C}$ , la famille  $\{z_1, z_2\}$  est-elle libre ? I.e. les vecteurs  $z_1$  et  $z_2$  sont-ils  $\mathbb{R}$ -linéairement indépendants ?*

**Exercice 2.** *Considérons les éléments  $u = (1, 2, 3)$ ,  $v = (4, 5, 6)$  et  $w = (1, -2, 1)$  de  $\mathbb{R}^3$ .*

1. *La famille  $\{u, v, w\}$  du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathbb{R}^3$  est-elle libre ? I.e. les vecteurs  $u$ ,  $v$  et  $w$  sont-ils  $\mathbb{R}$ -linéairement indépendants ? Quel est le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$  engendré par ces trois vecteurs ?*
2. *Considérons le vecteur  $w' = (5, 4, 3) \in \mathbb{R}^3$ . La famille  $\{u, v, w'\}$  est-elle libre ?*

**Exercice 3.** *Dans  $\mathbb{R}$  considéré comme espace vectoriel sur  $\mathbb{Q}$ , on considère la famille  $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ . Montrer qu'elle est libre.*

**Exercice 4.** *La partie*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y = 0\}$$

*de  $\mathbb{R}^2$  est-elle un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^2$  ?*

**Exercice 5.** *Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels d'un  $K$ -espace vectoriel  $E$ .*

1. *Montrer que  $F \cap G$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .*
2. *Montrer que  $F \cup G$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  si et seulement si  $F \subset G$  ou  $G \subset F$ .*
3. *Montrer que  $F + G$  est le plus petit sous-espace vectoriel de  $E$  contenant  $F \cup G$ .*

**Exercice 6.** Soit  $f : E \longrightarrow F$  un homomorphisme d'espaces vectoriels. Montrer que  $f$  est injective si et seulement si  $\text{Ker } f = \{0\}$ .

**Exercice 7.** Montrer que l'image d'une famille libre par une application linéaire injective est encore une famille libre.

Montrer que l'image d'une famille génératrice par une application linéaire surjective est encore une famille génératrice.

**Exercice 8.** Soient  $E$  et  $F$  deux  $K$ -espaces vectoriels de dimension finie. Montrer que  $E$  et  $F$  sont isomorphes si et seulement si  $\dim E = \dim F$ .

**Exercice 9.** Soit  $f$  un endomorphisme d'un  $K$ -espace vectoriel  $E$  tel que tout vecteur non nul de  $E$  est vecteur propre de  $f$ . On veut montrer qu'alors  $f$  est une homothétie (i.e.  $\exists \lambda \in K, \forall x \in E, f(x) = \lambda x$ ).

Soient  $x$  et  $x'$  deux vecteurs non nuls de  $E$ . Il existe donc  $\lambda$  et  $\lambda'$  dans  $K$  tels que  $f(x) = \lambda x$  et  $f(x') = \lambda' x'$ .

a) On suppose que  $x$  et  $x'$  sont colinéaires. Montrer que  $\lambda = \lambda'$ .

b) On suppose maintenant que  $x$  et  $x'$  sont linéairement indépendants. En considérant le vecteur  $x - x'$ , montrer que  $\lambda = \lambda'$ .

c) Conclure.

**Exercice 10.** (Théorème du rang)

Soit  $f : E \longrightarrow F$  un morphisme de  $K$ -espaces vectoriels de dimensions finies. Montrer que

$$\text{rg}(f) = \dim E - \dim(\text{Ker } f).$$

**Exercice 11.** (*Espace vectoriel quotient*)

Soient  $E$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Montrer que :

$$\dim(E/F) = \dim E - \dim F.$$

**Exercice 12.** Soit  $f : E \rightarrow F$  un morphisme de  $K$ -espaces vectoriels de dimensions finies et égales. Montrer que  $f$  est injective si et seulement si  $f$  est surjective. Donner des contre-exemples en dimension infinie.

**Exercice 13.** Soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie et soient  $f$  et  $g$  deux endomorphismes de  $E$  tels que :

$$f \circ g \circ f = f \quad \text{et} \quad g \circ f \circ g = g.$$

1. Montrer que pour tout  $v \in E$ , on a :  $v - (g \circ f)(v) \in \text{Ker } f$ . En déduire que

$$E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } g.$$

2. Comparer le rang de  $f$  et le rang de  $g$ .

**Exercice 14.** Soit  $E$  un espace vectoriel et  $f$  un endomorphisme de  $E$ .

1. Montrer que

$$E = \text{Ker } f + \text{Im } f \iff \text{Im } f^2 = \text{Im } f.$$

2. Montrer que, si de plus  $E$  est de dimension finie, on a :

2.1.

$$E = \text{Ker } f + \text{Im } f \iff E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f.$$

2.2.

$$\text{Im } f^2 = \text{Im } f \iff \text{Ker } f^2 = \text{Ker } f.$$

3. Si  $E$  est de dimension infinie, donner un exemple pour lequel 2.1 et 2.2 sont faux.

**Exercice 15.** Soient  $E_0, E_1, \dots, E_n$  des espaces vectoriels de dimension finie sur un corps  $K$ , et  $(f_i)$  ( $0 \leq i \leq n-1$ ) des applications linéaires définies sur  $E_i$  à valeurs dans  $E_{i+1}$ . On dit que

$$E_0 \xrightarrow{f_0} E_1 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_{n-2}} E_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} E_n$$

est une suite exacte si pour tout  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ , on a  $\text{Im } f_{i-1} = \text{Ker } f_i$ . On note  $0$  l'espace vectoriel  $\{0\}$ .

1. Quelles sont les applications linéaires possibles

$$0 \xrightarrow{f} E_0 \quad \text{et} \quad E_1 \xrightarrow{g} 0 \quad ?$$

2. Que signifie pour  $f_0$  le fait que

$$0 \longrightarrow E_0 \xrightarrow{f_0} E_1$$

soit une suite exacte ?

3. Que signifie pour  $f_0$  le fait que

$$E_0 \xrightarrow{f_0} E_1 \longrightarrow 0$$

soit une suite exacte ?

4. Montrer que si la suite

$$0 \longrightarrow E_0 \xrightarrow{f_0} E_1 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_{n-2}} E_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} E_n \longrightarrow 0$$

est exacte, alors

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \dim E_k = 0.$$

5. Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels de dimension finie. Déterminer des applications linéaires  $f$  et  $g$  pour que la suite

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{f} E \times F \xrightarrow{g} F \longrightarrow 0$$

soit exacte. En déduire que

$$\dim E \times F = \dim E + \dim F.$$

Déterminer de même des applications linéaires  $\phi$  et  $\psi$  pour que la suite

$$0 \longrightarrow E \cap F \xrightarrow{\phi} E \times F \xrightarrow{\psi} E + F \longrightarrow 0$$

soit exacte. En déduire que

$$\dim(E \cap F) + \dim(E + F) = \dim E + \dim F.$$

**Exercice 16.** Une matrice carrée  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est dite symétrique si  ${}^tA = A$ . On note  $S_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices symétriques d'ordre  $n$  à coefficients dans  $\mathbb{R}$ .

1. Montrer que  $S_n(\mathbb{R})$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ .
2. Donner une base de  $S_2(\mathbb{R})$ . Quelle est la dimension du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $S_n(\mathbb{R})$  ?
3. Montrer que, pour toutes matrices  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on a :

$${}^t(AB) = {}^tB {}^tA.$$

4. En déduire que, pour toutes matrices  $A$  et  $B$  de  $S_n(\mathbb{R})$ , on a :

$$AB \in S_n(\mathbb{R}) \iff AB = BA.$$

5. Une matrice carrée  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est dite antisymétrique si  ${}^tA = -A$ . On note  $A_n(\mathbb{R})$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des matrices antisymétriques d'ordre  $n$  à coefficients dans  $\mathbb{R}$ . Donner une base de  $A_3(\mathbb{R})$ . Quelle est la dimension du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $A_n(\mathbb{R})$  ?

6. Montrer que les sous-espaces vectoriels  $S_n(\mathbb{R})$  et  $A_n(\mathbb{R})$  sont supplémentaires dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

**Exercice 17.** Soit  $\mathbb{R}[X]_2$  l'espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  des polynômes à une indéterminée

à coefficients dans  $\mathbb{R}$  de degré au plus 2, muni de la base canonique constituée des polynômes  $P_0(X) = 1$ ,  $P_1(X) = X$  et  $P_2(X) = X^2$ .

Considérons l'application  $\Phi$  suivante :

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}[X]_2 &\longrightarrow \mathbb{R}[X]_2 \\ P &\longmapsto XP'' + (1 - X)P' \end{aligned}$$

où  $P'$  (respectivement  $P''$ ) est le polynôme dérivé du polynôme  $P$  (respectivement  $P'$ ).

1. Montrer que  $\Phi$  est un morphisme de  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels et déterminer sa matrice dans la base canonique.
2. Déterminer le noyau et le rang de  $\Phi$ .
3. Montrer que les polynômes  $Q_0(X) = \sqrt{2}$ ,  $Q_1(X) = -X + 1$  et  $Q_2(X) = X^2 - 4X + 2$  forment une base de  $\mathbb{R}[X]_2$ . Déterminer la matrice de l'endomorphisme  $\Phi$  dans cette base.

**Exercice 18.** On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  et l'application  $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  définie par  $f(M) = AM - MA$  pour toute  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

1. Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .
2. Déterminer sa matrice dans la base canonique de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .
3. Déterminer les matrices  $M$  de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  qui commutent avec  $A$ .
4. Quel est le rang de  $f$  ?

**Exercice 19.** (Projecteurs)

Soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel.

1. Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$  supplémentaires dans  $E$  (i.e.  $E = F \oplus G$ ) et  $p$  le projecteur sur  $F$  parallèlement à  $G$  (i.e.  $p$  est l'application linéaire de  $E$  dans  $E$  définie par : pour  $x \in E$ ,  $x = x' + x''$  avec  $x' \in F$  et  $x'' \in G$ , alors  $p(x) = x'$ ).

a) Montrer que  $p \circ p = p$ .

b) Montrer que  $\text{Im}(p) = F$  et  $\text{Ker}(p) = G$ .

2. Réciproquement, soit  $p$  un  $K$ -endomorphisme de  $E$  tel que  $p \circ p = p$  ( $p$  est un idempotent de l'anneau  $\mathcal{L}_K(E)$  des  $K$ -endomorphismes de  $E$ ).

a) Montrer que  $\text{Im}(p)$  et  $\text{Ker}(p)$  sont deux sous-espaces vectoriels de  $E$  supplémentaires dans  $E$ .

b) Montrer que  $p$  est le projecteur sur  $\text{Im}(p)$  parallèlement à  $\text{Ker}(p)$ .

3. Si  $E$  est de dimension finie, et si  $p$  est un projecteur de  $E$ , montrer qu'il existe une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $p$  soit

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où  $r$  est le rang de  $p$  et  $I_r$  la matrice identité de taille  $r$ .

**Exercice 20.** (Symétries)

Soient  $E$  un  $K$ -espace vectoriel et  $s$  un endomorphisme de  $E$  vérifiant  $s \circ s = \text{id}$  (l'application  $s$  est une involution).

On note

$$E_1 = \{x \in E \mid s(x) = x\} = \text{Ker}(s - \text{id})$$

et

$$E_2 = \{x \in E \mid s(x) = -x\} = \text{Ker}(s + \text{id}).$$

1. Montrer que

$$E = E_1 \oplus E_2.$$

2. Montrer que  $\text{Ker } s = \{0\}$  et  $\text{Im } s = E$ .

L'endomorphisme  $s$  est appelé symétrie par rapport à  $E_1$  parallèlement à  $E_2$ .

**Exercice 21.** On considère la matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  suivante :  $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ .

Déterminer la matrice  $J$  de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  telle que  $A = I + 4J$  où  $I$  est la matrice identité de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . Calculer  $A^{100}$ .

**Exercice 22.** Résoudre dans  $\mathbb{R}^3$  le système suivant, où  $m$  est un paramètre réel :

$$\begin{cases} (5-m)x - 2y - z = 1 \\ 2x + (2-m)y - 2z = 2 \\ -x - 2y + (5-m)z = 1 \end{cases}$$

**Exercice 23.** Calculer le déterminant de l'endomorphisme "transposition" de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  :  $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  définie par  $f(M) = {}^tM$  pour toute  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

(Indication : on pourra utiliser le fait que les sous-espaces vectoriels constitués respectivement des matrices symétriques et des matrices anti-symétriques sont supplémentaires dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  (voir Exercice 16)).

**Exercice 24.** Montrer que tout endomorphisme nilpotent (i.e. dont une puissance est nulle) et diagonalisable (i.e. tel qu'il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale) d'un espace vectoriel de dimension finie est nul.

**Exercice 25.** On considère l'endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{R}^n$  dont la matrice dans la base canonique est la matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dont tous les coefficients sont égaux à 1.

- a) Déterminer le rang et la trace de  $f$ .
- b) En déduire sans calcul le polynôme caractéristique de  $f$ .
- c) L'endomorphisme  $f$  est-il diagonalisable ?
- d) Déterminer le polynôme minimal de  $f$ .

**Exercice 26.** Soient  $A$  et  $B$  deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  vérifiant :

$$AB - BA = A.$$

- a) Montrer que, pour tout entier naturel  $k$ , on a :  $A^k B - BA^k = kA^k$ .
- b) On considère l'application  $f$ , de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dans lui-même, définie par  $f(M) = MB - BM$  pour tout  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
- c) En déduire que  $A$  est nilpotente. Indication : Reasonner par l'absurde et considérer les vecteurs propres de  $f$ .

**Exercice 27.** On note  $E$  l'ensemble des suites  $(u_n)$  de nombres réels vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 5u_{n+3} = 2u_{n+2} + 15u_{n+1} - 6u_n.$$

1) Montrer que  $E$  est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  de toutes les suites de nombres réels.

2) Montrer que l'application  $\Phi : E \longrightarrow \mathbb{R}^3$  qui à  $(u_n)$  associe  $(u_2, u_1, u_0)$  est un isomorphisme. Quelle est la dimension de  $E$  ?

L'application  $\psi : E \longrightarrow \mathbb{R}^3$  qui à  $(u_n)$  associe  $(u_3, u_2, u_1)$  est-elle aussi un isomorphisme ?

3) On note  $f$  l'application  $\Phi^{-1} \circ \psi : E \longrightarrow E$ . Montrer que si  $u = (u_n) \in E$  et si on pose  $(v_n) = f(u)$  et  $(t_n) = f^5(u)$  alors  $v_3 = u_4$  et  $t_2 = u_7$ .

4) On considère les suites  $(U_n) = U = \Phi^{-1}(1, 0, 0)$ ,  $(V_n) = V = f(U)$  et  $(W_n) = W = f(V)$ . Montrer que  $(U, V, W)$  est une base de  $E$  et que la matrice de  $f$  dans cette base est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -6/5 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2/5 \end{pmatrix}.$$

5) Calculer le polynôme caractéristique de  $A$ . Trouver les valeurs propres de  $f$  sachant que l'une d'elles est rationnelle.

6) Montrer que si  $u = (u_n) \in E$  est vecteur propre de  $f$  associé à la valeur propre  $\lambda$ , alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = \lambda^n u_0$ .

7) Montrer que pour toute suite  $(u_n) \in E$ , il existe un triplet  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = a(2/5)^n + (b + (-1)^n c)3^{n/2}.$$

**Exercice 28.** Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  de base  $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$  et soit  $f$  l'endomorphisme de  $E$  admettant la matrice  $A$  suivante dans la base  $\mathcal{E}$  :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de  $f$ .
2. Déterminer les sous-espaces propres de  $f$ .
3. L'endomorphisme  $f$  est-il diagonalisable ?
4. Déterminer le polynôme minimal de  $f$ .
5. Déterminer les sous-espaces caractéristiques de  $f$ .
6. Donner une base  $\mathcal{F}$  de  $E$  dans laquelle la matrice de  $f$  soit la forme réduite de Jordan suivante :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Écrire la matrice de passage  $P$  de la base  $\mathcal{E}$  à la base  $\mathcal{F}$ .

7. Soit  $B$  la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{F}$ . On rappelle que si  $M$  est une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , alors

$$\exp(M) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} M^k.$$

**7.1** Calculer  $\exp(B)$ .

**7.2** Sans calculs, donner l'expression de  $\exp(A)$  en fonction de  $\exp(B)$  et de la matrice  $P$ .

**Exercice 29.** (Nous nous intéressons aux liens de structure entre un espace vectoriel et son dual.)

1. Soient  $E$  un espace vectoriel de dimension finie sur un corps  $K$  et  $E^*$  son espace dual. Montrer que  $E$  et  $E^*$  sont isomorphes (en tant que  $K$ -espaces vectoriels).

On s'intéresse à présent à ce qu'il en est si  $E$  est de dimension infinie.

2. Soit  $E = K[X]$  l'espace vectoriel sur  $K$  des polynômes à une indéterminée  $X$  et à coefficients dans  $K$ .

Si  $f^*$  est une forme linéaire sur  $E$  (i.e.  $f^* \in E^*$ ), on pose :  $u_n = f^*(X^n)$ . Considérons l'application  $\varphi$  de  $E^*$  dans l'espace vectoriel  $K^{\mathbb{N}}$  des suites à valeurs dans  $K$  qui à tout  $f^*$  de  $E^*$  fait correspondre

$$\varphi(f^*) = (u_0, \dots, u_n, \dots).$$

2.1. Montrer que  $\varphi$  est un isomorphisme.

2.2. On souhaite montrer ici, par un argument détourné, que la question précédente suffit à exhiber un exemple d'espace vectoriel non isomorphe à son dual, en l'occurrence l'espace vectoriel  $\mathbb{Q}[X]$ .

a) En considérant l'application  $j : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{N}$  qui à tout rationnel  $p/q$ , avec  $p$  et  $q$  premiers entre eux et  $q > 0$ , fait correspondre  $2^p 3^q$  si  $p \geq 0$  et  $5^{-p} 3^q$  si  $p < 0$ , montrer que  $\mathbb{Q}$  est dénombrable. En déduire que  $\mathbb{Q}[X]$  est également dénombrable.

b) Montrer que l'ensemble  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  des parties  $\mathbb{N}$  est non dénombrable (on raisonnera par l'absurde : si  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$  est une bijection, considérer la partie  $A$  de  $\mathbb{N}$  suivante :  $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin g(n)\}$ ).

En considérant l'application  $\Gamma : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$  qui à toute partie  $F$  de  $\mathbb{N}$  fait correspondre la suite  $(\Gamma_F(n))_{n \in \mathbb{N}}$  à valeurs dans  $\mathbb{Q}$  définie par :  $\Gamma_F(n)$  égal 1 si  $n \in F$  et 0 sinon, montrer que  $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$  est non dénombrable.

c) Conclure.

2.3. On souhaite montrer ici que  $E := K[X]$  est isomorphe à un sous-espace strict de son dual. On considère les polynômes

$$e_0(X) = 1, e_1(X) = X, \dots, e_n(X) = X^n, \dots$$

et pour tout polynôme  $P(X) = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ , on pose  $e_i^*(P) = a_i$ .

a) Montrer qu'une famille  $(e_{i_1}^*, \dots, e_{i_p}^*)$  d'un nombre fini de  $e_i^*$  est une famille libre d'éléments de  $E^*$ .

b) Soit  $V^*$  l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires d'un nombre fini de formes  $e_i^*$ . Montrer que  $V^*$  est un sous-espace vectoriel de  $E^*$  et que l'application linéaire  $\psi$  de  $E$  dans  $E^*$  définie par  $\psi(e_i) = e_i^*$  est un isomorphisme de  $E$  sur  $V^*$ .

c) Montrer que la forme linéaire  $f^* \in E^*$  telle que  $f^*(P) = P(1)$  n'appartient pas à  $V^*$ . Conclure.

**Exercice 30.** Triangulariser l'endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{R}^3$  de matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -17 & 25 \\ 2 & -9 & 16 \\ 1 & -5 & 9 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique.

**Exercice 31.** Triangulariser l'endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{R}^3$  de matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 5 \\ -5 & -6 & -5 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique.

**Exercice 32.** *Considérons l'endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{R}^{10}$  qui admet pour matrice dans la base canonique la matrice suivante :*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

- 1) Déterminer le polynôme caractéristique  $P_f$  ainsi que le polynôme minimal  $m_f$  de  $f$ .
- 2) Déterminer les dimensions des sous-espaces vectoriels  $\text{Ker}(f - \lambda \text{id})^i$  pour  $\lambda \in \{2, 3, 4\}$  et  $i \in \{1, \dots, 10\}$ .
- 3) Quelles sont, à similitude près, les matrices qui admettent à la fois le même polynôme caractéristique et le même polynôme minimal que  $f$ .

# Sujets d'examens des années précédentes

**Exercice 33. - Examen M1-MEEF Toulon-Nice Avril 2013. (Extraits de l'épreuve 2 de Mathématiques de la session 2011 des concours communs Polytechniques - Filière MP.)**

**Commutant d'une matrice**

$\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  est la  $\mathbb{R}$ -algèbre des matrices carrées réelles d'ordre 3. Pour  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ , on note  $C(A) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / AM = MA\}$  le commutant de la matrice  $A$ .

1. Démontrer que pour tout  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ,  $C(A)$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

2. Démontrer, en détaillant, que la matrice  $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 4 & -2 & 0 \\ -4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$  est semblable à la matrice  $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Pour cela, on donnera une matrice de passage que l'on notera  $P$ .

3. Déterminer par le calcul, le commutant  $C(T)$  de la matrice  $T$  puis donner sa dimension.

4. Soit l'application  $f : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  définie par  $f(M) = P^{-1}MP$ .

a. Montrer que  $f$  est un automorphisme du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

b. Montrer que  $M \in C(A)$  si et seulement si  $f(M) \in C(T)$ .

Que peut-on en déduire pour la dimension de  $C(A)$  ?

5. Existe-t-il un polynôme annulateur de  $A$  de degré inférieur ou égal à 2 ?

5. Démontrer que  $C(A) = \text{vect}\{I_3, A, A^2\}$ . En déduire que  $C(A)$  est l'ensemble des polynômes en  $A$ . Ce dernier résultat reste-t-il vrai pour toute matrice  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  ? Justifiez votre réponse.

**Exercice 34. - Examen M1-MEEF Toulon-Nice Avril 2013. (Variante du troisième exercice du concours PLP interne de 2000)**

Soit  $E$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des suites réelles définies sur l'ensemble  $\mathbb{N}$  des entiers naturels. On considère dans  $E$  l'ensemble  $F$  des suites  $(u_n)$  vérifiant la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 10u_{n+1} - 21u_n.$$

1. a) Démontrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

b) Déterminer toutes les suites géométriques qui appartiennent à  $F$ .

c) On considère les suites  $(v_n)$  et  $(w_n)$  définies pour tout entier naturel par :

$$v_n = 3^n \quad \text{et} \quad w_n = 7^n.$$

Vérifier que, pour tous nombres réels  $a$  et  $b$ , la suite  $(u_n)$ , définie pour tout entier naturel par  $u_n = av_n + bw_n$  appartient à  $F$ . Démontrer que la famille  $((v_n), (w_n))$  est une base de  $F$ .

Indication : on pourra d'abord montrer que cette famille est libre puis s'appuyer sur une récurrence pour prouver qu'elle est génératrice.

2. Soient  $(x_n)$  et  $(y_n)$  les suites définies pour tout entier naturel  $n$  par

$$x_0 = 1, y_0 = 0, \quad x_{n+1} = -21y_n \quad \text{et} \quad y_{n+1} = x_n + 10y_n.$$

a) Vérifier que les suites  $(x_n)$  et  $(y_n)$  appartiennent à  $F$ .

b) Déterminer les coordonnées respectives de  $(x_n)$  et  $(y_n)$  dans la base  $((v_n), (w_n))$  de  $F$ .

3. On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -7 & 10 & 3 \\ 7 & -7 & 0 \end{pmatrix}$ .

a) Calculer le polynôme caractéristique de  $A$ .

b) La matrice  $A$  est-elle diagonalisable ?

c) Calculer  $A^2$ .

d) Déterminer des nombres réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $A^3 = \alpha A + \beta A^2$ .

e) Démontrer que, pour tout entier naturel non nul  $n$ ,

$$A^n = x_{n-1}A + y_{n-1}A^2,$$

où  $x_{n-1}$  et  $y_{n-1}$  sont les nombres définis à la question 2.

**Exercice 35. Examen M1-MEEF Toulon-Nice Janvier 2014 - Matrices d'ordre fini (sujet du CAPES 2014 - Epreuve 2).**

Dans tout le problème,  $n$  désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1. On désigne par  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  (respectivement  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ ) l'ensemble des matrices carrées à  $n$  lignes et  $n$  colonnes dont les coefficients appartiennent à  $\mathbb{C}$  (respectivement à  $\mathbb{R}$ , à  $\mathbb{Z}$ ).

La matrice identité de taille  $n$  est notée  $I_n$ .

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . L'ensemble des valeurs propres de  $A$  est appelé spectre de  $A$  et noté  $Sp(A)$ .

On dit que  $A$  est **d'ordre fini** s'il existe  $k \in \mathbb{N}^*$ , tel que  $A^k = I_n$ .

Si  $A$  est d'ordre fini, le plus petit entier strictement positif  $k$  tel que  $A^k = I_n$  est appelé **ordre** de  $A$  et noté  $o(A)$ .

**Partie A : préliminaires**

1. Cette question consiste en des rappels de théorèmes du cours.

1.1. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On suppose qu'il existe  $P \in \mathbb{R}[X]$ ,  $P \neq 0$  tel que  $P(A) = 0$ .

i. Donner une condition suffisante sur  $P$  pour que  $A$  soit trigonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

ii. Donner une condition suffisante sur  $P$  pour que  $A$  soit diagonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

1.2. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . On suppose qu'il existe  $P \in \mathbb{C}[X]$ ,  $P \neq 0$  tel que  $P(A) = 0$ .

Que deviennent les conditions précédentes lorsque l'on s'intéresse à la trigonalisation ou à la diagonalisation de  $A$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  ?

2. Soit  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , d'ordre fini. On pose  $o(B) = b$ .

2.1. Démontrer que  $B$  est inversible.

2.2. Soit  $k \in \mathbb{Z}$ . Démontrer que  $B^k = I_n$  si et seulement si  $b$  divise  $k$ .

2.3. Démontrer que les valeurs propres de  $B$  sont des racines  $b$ -ièmes de l'unité.

2.4. Démontrer que  $B$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

3. Soit  $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Ses valeurs propres sont notées  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ .

On suppose que  $C$  est diagonalisable et que pour tout entier  $i$  tel que  $1 \leq i \leq n$ ,  $\lambda_i$  est une racine  $n_i$ -ième de l'unité pour un certain entier  $n_i$ .

Pour tout entier  $i$  tel que  $1 \leq i \leq n$ , on note  $k_i$  le plus petit entier strictement positif tel que  $\lambda_i^{k_i} = 1$ .

3.1. Démontrer que  $C$  est d'ordre fini et que son ordre divise le PPCM de  $k_1, \dots, k_n$ .

3.2. Démontrer que  $o(C)$  est le PPCM de  $k_1, \dots, k_n$ .

### Partie B : matrices d'ordre fini à coefficients réels

Dans cette partie, on considère une matrice  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  d'ordre fini. Le but est de démontrer que cette matrice est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$  et de déterminer le spectre de  $A$  dans  $\mathbb{C}$ .

1. Démontrer que si toutes les valeurs propres de  $A$  dans  $\mathbb{C}$  sont réelles, alors  $\text{Sp}(A) \subseteq \{-1, 1\}$ .

2. On suppose que 1 est la seule valeur propre de  $A$  dans  $\mathbb{C}$ .

2.1. Justifier qu'il existe  $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ , inversible, et  $a, b, c$  éléments de  $\mathbb{R}$  tels que :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.2. On pose  $B = P^{-1}AP$ . Démontrer que  $B$  est d'ordre fini.

2.3. Démontrer par récurrence que pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :

$$B^k = \begin{pmatrix} 1 & ka & \frac{k(k-1)}{2}ac + kb \\ 0 & 1 & kc \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.4. En déduire que  $A = I_3$ .

3. Énoncer sans démonstration un résultat semblable lorsque  $-1$  est la seule valeur propre de  $A$  dans  $\mathbb{C}$ .

4. On suppose que  $-1$  est valeur propre simple de  $A$  et que 1 est valeur propre double de  $A$ .

4.1. Justifier qu'il existe  $Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ , inversible, et  $a, b, c$  éléments de  $\mathbb{R}$  tels que :

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} -1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.2. On pose  $C = Q^{-1}AQ$ .

Démontrer qu'il existe trois suites de nombres réels  $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ,  $(\beta_k)_{k \in \mathbb{N}}$  et  $(\gamma_k)_{k \in \mathbb{N}}$  telles que pour tout entier naturel  $k$  :

$$C^k = \begin{pmatrix} (-1)^k & \alpha_k & \beta_k \\ 0 & 1 & \gamma_k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On définira ces suites à l'aide de relations de récurrence.

4.3. Donner une expression de  $\gamma_k$  pour tout  $k \geq 0$ .

4.4. En déduire que  $c = 0$ .

4.5. En déduire que  $C$  et  $A$  sont diagonalisables dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ .

5. Énoncer sans démonstration un résultat semblable lorsque  $-1$  est valeur propre double de  $A$  et  $1$  est valeur propre simple de  $A$ .

6. On suppose que  $A$  admet dans  $\mathbb{C}$  au moins une valeur propre non réelle.

6.1. Démontrer qu'il existe  $\theta \in 2\pi\mathbb{Q} \setminus \pi\mathbb{Z}$ , tel que  $Sp(A) = \{e^{i\theta}, e^{-i\theta}, 1\}$  ou  $\{e^{i\theta}, e^{-i\theta}, -1\}$ .

On pourra considérer le polynôme caractéristique de  $A$ .

6.2. Démontrer que  $A$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ .

7. Soit  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ . Démontrer que  $A$  est d'ordre fini si, et seulement si,  $A$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$  et qu'il existe  $\theta \in 2\pi\mathbb{Q}$  tel que  $Sp(A) = \{e^{i\theta}, e^{-i\theta}, 1\}$  ou  $\{e^{i\theta}, e^{-i\theta}, -1\}$ .

### Partie C : matrices d'ordre fini à coefficients entiers

Soit  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ , d'ordre fini. D'après la partie B, son spectre dans  $\mathbb{C}$  est de la forme  $Sp(A) = \{e^{i\theta}, e^{-i\theta}, 1\}$  ou  $\{e^{i\theta}, e^{-i\theta}, -1\}$  où  $\theta \in 2\pi\mathbb{Q}$ .

1. Démontrer que  $2 \cos \theta \in \mathbb{Z}$ .

On pourra considérer la trace de  $A$ .

2. Donner les valeurs possibles pour  $\theta$ .

3. Donner les différents spectres dans  $\mathbb{C}$  possibles pour  $A$  puis démontrer que  $o(A) \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$ .

4. On cherche maintenant à construire des matrices de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$  de chaque ordre.

4.1. Donner des matrices de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$  d'ordre 1 et 2.

- 4.2. *i. Soit  $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ . Calculer le polynôme caractéristique de :*
- $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -a \\ 1 & 0 & -b \\ 0 & 1 & -c \end{pmatrix}.$$
- ii. Construire une matrice de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$  dont les valeurs propres sont  $1, e^{2i\pi/3}$  et  $e^{-2i\pi/3}$ . Démontrer que cette matrice est d'ordre 3.*
- iii. Construire des matrices de  $\mathbb{M}_3(\mathbb{Z})$  d'ordre 4 et d'ordre 6.*

**Exercice 36. (Examen M1-MEEF Toulon-Nice Janvier 2015) : racine carrée d'un endomorphisme.**

Dans tout le problème,  $n$  est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et  $E$  est un espace vectoriel de dimension finie  $n$  sur le corps  $\mathbb{R}$  des nombres réels.

$\mathcal{L}(E)$  désigne l'algèbre des endomorphismes de  $E$  et  $GL(E)$  l'ensemble des endomorphismes de  $E$  qui sont bijectifs.

On note  $0$  l'endomorphisme nul et  $\text{id}$  l'application identité.

Pour tout endomorphisme  $f$  de  $E$ , l'ensemble des valeurs propres de  $f$  sera noté  $\text{Sp}(f)$  et on notera :

$$\mathcal{R}(f) = \{h \in \mathcal{L}(E) \mid h^2 = f\}.$$

$\mathbb{R}[X]$  désigne l'anneau des polynômes à coefficients réels.

Etant donné  $f \in \mathcal{L}(E)$  et  $P \in \mathbb{R}[X]$  donné par  $P(X) = \sum_{k=0}^{\ell} a_k X^k$ , on définit  $P(f) \in \mathcal{L}(E)$  par :

$$P(f) = \sum_{k=0}^{\ell} a_k f^k,$$

où  $f^0 = \text{id}$  et pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $f^k = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{k \text{ fois}}$ .

Si  $f_1, \dots, f_q$  désignent  $q$  endomorphismes de  $E$  (où  $q \in \mathbb{N}^*$ ) alors  $\prod_{1 \leq i \leq q} f_i$  désignera l'endomorphisme  $f_1 \circ \dots \circ f_q$ .

Pour tout entier  $p$  non nul,  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  désigne l'espace des matrices carrées à  $p$  lignes et  $p$  colonnes à coefficients dans  $\mathbb{R}$ .

$I_p$  est la matrice identité de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ .

**1.** On désigne par  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -7 \\ -8 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**1.1.** Montrer que  $f$  est diagonalisable.

1.2. Déterminer une base  $(v_1, v_2, v_3)$  de  $\mathbb{R}^3$  formée de vecteurs propres de  $f$  et donner la matrice  $D$  de  $f$  dans cette nouvelle base.

1.3. Soit  $P$  la matrice de passage de la base canonique à la base  $(v_1, v_2, v_3)$ . Soit un entier  $m \geq 1$ . Sans calculer l'inverse de  $P$ , exprimer  $A^m$  en fonction de  $D$ ,  $P$  et  $P^{-1}$ .

1.4. Calculer  $P^{-1}$ , puis déterminer la matrice de  $f^m$  dans la base canonique.

1.5. Déterminer toutes les matrices de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  qui commutent avec la matrice  $D$  trouvée à la question 2.2.

1.6. Montrer que si  $H \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  vérifie  $H^2 = D$ , alors  $H$  et  $D$  commutent.

1.7. Dédire de ce qui précède toutes les matrices  $H$  de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  vérifiant  $H^2 = D$ , puis déterminer tous les endomorphismes  $h$  de  $\mathbb{R}^3$  vérifiant  $h^2 = f$  en donnant leur matrice dans la base canonique.

2. Soient  $f$  et  $j$  les endomorphismes de  $\mathbb{R}^3$  dont les matrices respectives  $A$  et  $J$  dans la base canonique sont données par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.1. Calculer  $J^m$  pour tout entier  $m \geq 1$ .

2.2. En déduire que pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$ ,  $f^m = \text{id} + \frac{1}{3}(4^m - 1)j$ . Cette relation est-elle encore valable pour  $m = 0$  ?

2.3. Montrer que  $f$  admet deux valeurs propres distinctes  $\lambda$  et  $\mu$  telles que  $\lambda < \mu$ .

2.4. Montrer qu'il existe un unique couple  $(p, q)$  d'endomorphismes de  $\mathbb{R}^3$  tel que pour tout entier  $m \geq 0$ ,  $f^m = \lambda^m p + \mu^m q$  et montrer que ces endomorphismes  $p$  et  $q$  sont linéairement indépendants.

2.5. Après avoir calculé  $p^2, q^2, p \circ q$  et  $q \circ p$ , trouver tous les endomorphismes  $h$ , combinaisons linéaires de  $p$  et  $q$ , qui vérifient  $h^2 = f$ .

**2.6.** Montrer que  $f$  est diagonalisable et trouver une base de vecteurs propres de  $f$ . Ecrire la matrice  $D$  de  $f$ , puis la matrice de  $p$  et de  $q$ , dans cette nouvelle base.

**2.7.** Déterminer une matrice  $K$  de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  non diagonale telle que  $K^2 = I_2$ , puis une matrice  $Y$  de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  non diagonale telle que  $Y^2 = D$ .

**2.8.** En déduire qu'il existe un endomorphisme  $h$  de  $\mathbb{R}^3$  vérifiant  $h^2 = f$  qui n'est pas combinaison linéaire de  $p$  et  $q$ .

**2.9.** Montrer que tous les endomorphismes  $h$  de  $\mathbb{R}^3$  vérifiant  $h^2 = f$  sont diagonalisables.

**Exercice 37. Problème de l'Examen M1-MEEF Toulon-Nice Janvier 2016 (extrait du concours Centrale-Supélec 2011).**

**Notations et rappels**

• Dans tout le problème  $n$  désigne un entier supérieur ou égal à 2 et  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ . On notera  $\mathcal{L}(E)$  le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des endomorphismes de  $E$  et  $\text{GL}(E)$  le sous-ensemble de  $\mathcal{L}(E)$  formé des automorphismes de  $E$ .

• À tout  $f \in \mathcal{L}(E)$ , on associe sa matrice  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$  dans la base  $\mathcal{B}$  choisie dans  $E$ .

On rappelle que l'application  $f \mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$  est un isomorphisme de  $\mathcal{L}(E)$  sur le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel, noté  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , formé des matrices carrées d'ordre  $n$  à coefficients complexes.

De la même façon,  $\text{GL}(E)$  (respectivement  $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ ), muni de la composition des applications (respectivement muni du produit des matrices), possède une structure de groupe.

• Soit  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . On dit que  $A$  est triangulaire supérieure si  $a_{ij} = 0$  dès que  $i > j$ . On note  $\mathcal{T}_n(\mathbb{C})$  le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  formé des matrices triangulaires supérieures.

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . On sera amené à utiliser la propriété (T) suivante :

(T) : il existe une base  $\mathcal{B}'$  de  $E$  telle que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C})$

• On rappelle que, par convention :  $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), A^0 = I$  (matrice identité).

• Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Alors  $f$  admet  $n$  valeurs propres en comptant chacune avec son ordre de multiplicité.

• On rappelle enfin que l'exponentielle d'un nombre complexe  $z$  peut être notée  $e^z$  ou  $\exp z$  et que, pour tout nombre complexe  $z$ , on a  $\exp z \neq 0$ .

**I Préliminaires : endomorphismes nilpotents, trace d'un endomorphisme**

**I.A** – Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . **I.A.1)** Montrer que  $f$  est injectif si et seulement si 0 n'est pas valeur propre de  $f$ .

**I.A.2)** Montrer que  $f \in \text{GL}(E)$  si et seulement si 0 n'est pas valeur propre de  $f$ .

**I.A.3)** Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Montrer que  $M$  est inversible si et seulement si 0 n'est pas valeur propre de  $M$ .

**I.B** – Une matrice  $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  sera dite nilpotente s'il existe un entier strictement positif  $k$  tel que :  $N^k = 0$  (matrice nulle).

On note  $k(N)$  le plus petit entier strictement positif vérifiant cette propriété et on l'appelle "indice de nilpotence de  $N$ ".

On note  $\mathcal{N}_n(\mathbb{C})$  l'ensemble des matrices nilpotentes de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

**I.B.1)** Soit  $N$  la matrice de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$  définie par :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que  $N \in \mathcal{N}_3(\mathbb{C})$  puis déterminer  $k(N)$ .

**I.B.2)** Soient  $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et  $M$  une matrice semblable à  $N$ . a) Montrer que, pour tout entier naturel  $p$ , les matrices  $M^p$  et  $N^p$  sont semblables. b) En déduire que, si  $N$  est nilpotente,  $M$  l'est aussi et  $k(M) = k(N)$ .

**I.B.3)** Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . On suppose qu'il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  telle que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C})$ . Montrer que, pour toute base  $\mathcal{B}'$  de  $E$ ,  $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$  est également nilpotente et de même indice de nilpotence que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ .

On dira alors que  $f$  est nilpotent et on notera  $k(f)$  l'indice de nilpotence de  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$  qui sera appelé aussi indice de nilpotence de  $f$ .

**I.B.4)** Soient  $N \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C})$  et  $n_{ij}$  son terme général.

On suppose que :  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, n_{ii} = 0$ .

On note  $n_{ij}^{(k)}$  le terme général de la matrice  $N^k$  avec  $k \in \mathbb{N}$ .

a) Montrer que  $N^2 \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C})$  et que  $n_{ij}^{(2)} = 0$  si  $j \leq i + 1$ .

b) Montrer, plus généralement, que  $N^k \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C})$  et que  $n_{ij}^{(k)} = 0$  si  $j \leq i + k - 1$ .

c) En déduire que  $N \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C})$ .

**I.B.5)** Soient  $f \in \mathcal{L}(E)$  et  $N \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C})$  la matrice de  $f$  dans une base appropriée  $\mathcal{B}$  de  $E$  donnée par la propriété (T) rappelée en préliminaire.

a) En explicitant le polynôme caractéristique de  $N$ , déterminer les valeurs propres de  $f$  en fonction des termes diagonaux de  $N$ .

b) Montrer que  $f$  est nilpotent si et seulement si 0 est sa seule valeur propre.

**I.B.6)** Montrer qu'une matrice triangulaire supérieure est nilpotente si et seulement si tous ses termes diagonaux sont nuls.

**I.C** – Soit  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

On rappelle que le trace de  $A$  est le nombre complexe  $\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ .

**I.C.1)** Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ .

Montrer que le nombre complexe  $\text{Tr}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$  ne dépend pas du choix de la base  $\mathcal{B}$  de  $E$ .

On appelle “trace de l’endomorphisme  $f$ ” ce nombre complexe, noté  $\text{Tr}(f)$ .

Ainsi on a, pour toute base  $\mathcal{B}$  de  $E$ ,  $\text{Tr}(f) = \text{Tr}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$ .

**I.C.2)** Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . On désigne par  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , les valeurs propres (éventuellement égales) de  $f$ .

Montrer, à l’aide de la question I.B.5.a), que :

$$\text{Tr}(f) = \sum_{k=1}^n \lambda_k.$$

**I.C.3)** On considère le cas  $n = 2$ . Soit  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  telle que  $\text{Tr}(A) = 0$ .

Montrer que  $A$  est soit diagonalisable, soit nilpotente.

**I.C.4)** A-t-on le même résultat lorsque  $n = 3$  ?

## II Exponentielle d’un endomorphisme

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ .

**II.A** – On suppose, tout d’abord,  $f$  diagonalisable, et on note  $\mathcal{B}_p = \{e_1, \dots, e_n\}$  une base de vecteurs propres de  $f$  associés respectivement aux valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . On définit alors l’endomorphisme  $\exp f$  par l’image des vecteurs de la base  $\mathcal{B}_p$  en posant :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, (\exp f)(e_i) = (\exp \lambda_i)e_i.$$

**II.A.1)**

a) Représenter la matrice de  $\exp f$  sur la base  $\mathcal{B}_p$ .

b) Montrer que  $\exp f$  appartient à  $\text{GL}(E)$ .

Cet endomorphisme est appelé “exponentielle de l’endomorphisme  $f$ ”. On admet qu’il ne dépend que de  $f$  et pas de la base de vecteurs propres de  $f$  utilisée pour le définir.

Si  $D$  est une matrice diagonale de termes diagonaux  $\mu_1, \dots, \mu_n$ , on note  $\exp D$  la matrice diagonale dont les termes diagonaux sont  $\exp \mu_1, \dots, \exp \mu_n$ .

**II.A.2)** Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . On suppose que  $M$  est diagonalisable.

Soient  $P_1, P_2$  deux matrices inversibles et  $D_1, D_2$  deux matrices diagonales telles que :

$$M = P_1 D_1 P_1^{-1} = P_2 D_2 P_2^{-1}.$$

Montrer que  $P_1(\exp D_1)P_1^{-1} = P_2(\exp D_2)P_2^{-1}$ .

On appellera exponentielle de la matrice  $M$ , la matrice notée  $\exp M$  égale à  $P(\exp D)P^{-1}$  où  $(P, D)$  est un couple de matrices utilisé pour diagonaliser  $M$ .

**II.B** – On suppose maintenant que  $f$  est nilpotent, d'indice de nilpotence  $k(f)$ . On considère une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  telle que  $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C})$ , selon la propriété (T).

On pose alors :

$$\exp f = \sum_{p=0}^{k(f)-1} \frac{f^p}{p!} \quad \text{et} \quad \exp M = \sum_{p=0}^{k(f)-1} \frac{M^p}{p!}$$

où  $f^0 =$  identité de  $E$ .

**II.B.1)** Déterminer les termes diagonaux de la matrice  $\exp M$ .

**II.B.2)** En déduire l'ensemble des valeurs propres de  $\exp f$  puis montrer que  $\exp f \in \text{GL}(E)$ .

L'endomorphisme  $\exp f$  est encore appelé l'exponentielle de  $f$  et la matrice  $\exp M$  l'exponentielle de  $M$ .

**II.C** – On suppose enfin que  $f$  satisfait à la propriété (P) suivante :

$$(P) : \text{il existe } (d, g) \in (\mathcal{L}(E))^2, \\ d \text{ diagonalisable, } g \text{ nilpotent tels que } d \circ g = g \circ d \text{ et } f = d + g$$

On admettra que, si  $f$  satisfait à (P), alors le couple  $(d, g)$  donné par (P) est unique.

**II.C.1)**

a) Montrer que :  $\exp d \circ \exp g = \exp g \circ \exp d$ .

On pose alors :  $\exp f = \exp d \circ \exp g$  et on l'appelle encore l'exponentielle de  $f$ .

On désigne par  $\Gamma_n(E)$  le sous-ensemble de  $\mathcal{L}(E)$  formé des endomorphismes  $f$  satisfaisant à (P).

De même, on désigne par  $\Gamma_n(\mathbb{C})$  le sous-ensemble de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  formé des matrices  $M$  qui peuvent s'écrire  $M = D + N$  avec  $D$  diagonalisable,  $N$  nilpotente et  $DN = ND$ .

b) Montrer que, pour toute matrice  $M$  de  $\Gamma_n(\mathbb{C})$ , le couple  $(D, N)$  associé est unique.

On pose  $\exp M = \exp D \exp N$  et on l'appelle l'exponentielle de  $M$ .

**II.C.2)** Soient  $M \in \Gamma_n(\mathbb{C})$  et  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ .

Démontrer que  $PMP^{-1} \in \Gamma_n(\mathbb{C})$  et que  $\exp(PMP^{-1}) = P(\exp M)P^{-1}$ .

**Exercice 38. Exercice de l'Examen M1-MEEF Toulon-Nice Janvier 2017.**

On désigne par  $E$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathbb{R}^3$  et on considère l'application  $f$  définie pour tout  $(x, y, z) \in E$  par :

$$f((x, y, z)) = (-y, x, z).$$

1) Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $E$ .

2) Montrer que  $f$  vérifie l'égalité :

$$f^3 - f^2 + f - Id_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

où  $Id_E$  désigne l'endomorphisme identité de  $E$  et  $0_{\mathcal{L}(E)}$  l'endomorphisme nul de  $E$ .

3) Déterminer  $\text{Ker}(f - Id_E)$  et  $\text{Ker}(f^2 + Id_E)$ .

4) On considère les endomorphismes  $p$  et  $q$  de  $E$  définis par :

$$p = \frac{1}{2}(Id_E + f^2) \quad \text{et} \quad q = \frac{1}{2}(Id_E - f^2).$$

Donner, pour tout  $(x, y, z)$  de  $E$ , une expression de  $p((x, y, z))$  et  $q((x, y, z))$ .

5) Montrer que :

$$\text{Im } p \oplus \text{Im } q = E.$$

**Exercice 39. Problème de l'Examen M1-MEEF Toulon-Nice Janvier 2017 (extrait du concours Centrale-Supélec 2008).**

**Notations**

- Dans ce problème,  $\mathcal{S}(\mathbb{C})$  désigne l'espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$  des suites de complexes  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
- Pour  $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ ,  $\mathcal{S}(\mathbb{C}^k)$  représente l'espace vectoriel des suites  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  formées de vecteurs de  $\mathbb{C}^k$ .
- On note  $\mathcal{M}_k(\mathbb{C})$  l'espace vectoriel des matrices carrées à  $k$  lignes à coefficients dans  $\mathbb{C}$ .
- Enfin, si  $M$  est une matrice,  ${}^tM$  désigne sa transposée.

**Question préliminaire**

Soit une matrice  $M$  de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ ,  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ .

On note  $e = \det(M)$ . On suppose  $e \neq 0$ .

- Calculer le produit matriciel

$$M \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

- En déduire l'expression de la matrice  $M^{-1}$  en fonction de  $a, b, c, d, e$ .

**A. Récurrences linéaires d'ordre 2**

On considère ici les suites  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\mathcal{S}(\mathbb{C})$  pour lesquelles il existe des complexes  $a_1$  et  $a_0$  vérifiant la propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+2} + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n = 0.$$

On associe à une telle suite de  $\mathcal{S}(\mathbb{C})$  la suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\mathcal{S}(\mathbb{C}^2)$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix}.$$

A.1) Déterminer une matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  telle que pour tout entier positif  $n$ , on ait :

$$X_{n+1} = AX_n.$$

A.2) Montrer que  $\lambda$  est valeur propre de  $A$  si et seulement si :

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

A.3) On suppose que  $A$  admet deux valeurs propres distinctes  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  et on note

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

- a) Déterminer les matrices  $Q$  inversibles de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  telles que  $AQ = QD$ .  
b) Exprimer  $A^n$  pour tout entier naturel  $n$ , en fonction des matrices  $Q, Q^{-1}$ , des complexes  $\lambda_1, \lambda_2$  et de l'entier  $n$ .

A.4) On suppose maintenant que  $A$  admet une seule valeur propre  $\lambda$  et on note

$$T = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

- a) Exprimer  $a_1$  et  $a_0$  en fonction de  $\lambda$ .  
b) Montrer que la matrice  $A$  est semblable à la matrice  $T$  et déterminer les matrices  $Q$  inversibles de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  telles que :

$$Q^{-1}AQ = T.$$

c) Exprimer  $A^n$  pour tout entier naturel  $n$ , en fonction des matrices  $Q, Q^{-1}$ , du complexe  $\lambda$  et de l'entier  $n$ .

A.5) Montrer que l'on a l'alternative suivante :

- soit  $A$  admet deux valeurs propres distinctes et elle est diagonalisable ;
- soit  $A$  admet une seule valeur propre et elle n'est pas diagonalisable.

#### A.6) Deux exemples numériques

Dans les deux exemples qui suivent, il est demandé de :

- expliciter la matrice  $A$ ,
- donner une matrice de passage  $Q$  telle que  $T = Q^{-1}AQ$  soit d'une forme simple comme ci-dessus,
- en déduire  $X_n$  puis  $x_n$  en fonction de  $x_0, x_1$  et  $n$

(il sera tenu compte de la simplicité et de la clarté des choix effectués).

a) **Exemple 1**

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifie la propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = 0.$$

b) **Exemple 2**

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifie la propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 0.$$

**B. Vers un ordre supérieur, à petits pas**

On note  $\Phi$  l'application qui à  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  élément de  $\mathcal{S}(\mathbb{C})$  associe la suite des vecteurs  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\mathcal{S}(\mathbb{C}^3)$  définie par  $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \\ x_{n+2} \end{pmatrix}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Ainsi,

les trois premiers termes de la suite  $\Phi((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$  sont  $\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ .

À tout polynôme unitaire de degré 3 de  $\mathbb{C}[X]$ ,

$$P(X) = X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0,$$

on associe le sous-espace  $\mathcal{R}_P$  de  $\mathcal{S}(\mathbb{C})$  formé des suites  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telles que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$x_{n+3} + a_2x_{n+2} + a_1x_{n+1} + a_0x_n = 0,$$

ainsi que la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{pmatrix}$ .

B.1) Calculer le polynôme caractéristique de  $A$ .

B.2) Vérifier que  $\Phi : \mathcal{S}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{C}^3)$  est linéaire et injective. Est-elle surjective ?

B.3) a) Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{R}_P$ . Montrer que son image  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par  $\Phi$  vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = A^n X_0.$$

b) Montrer que, réciproquement, toute suite de  $\mathcal{S}(\mathbb{C}^3)$  pour laquelle on a  $X_n = A^n X_0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , est élément de  $\Phi(\mathcal{R}_P)$ .

B.4) Montrer que  $\Phi(\mathcal{R}_P)$  est le sous-espace de  $\mathcal{S}(\mathbb{C}^3)$  engendré par les suites de vecteurs  $(A^n e_1)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(A^n e_2)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(A^n e_3)_{n \in \mathbb{N}}$ , où  $(e_1, e_2, e_3)$  désigne la base canonique de  $\mathbb{C}^3$ .

En déduire la dimension de  $\mathcal{R}_P$ .

**Exercice 40. Problème de l'Examen M1-MEEF Toulon-Nice Janvier 2018 (extrait du concours Ecoles des Mines 2009).**

La notation  $\mathbb{R}_2[X]$  désigne le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. On identifiera dans la suite de ce problème les éléments de  $\mathbb{R}_2[X]$  et leurs fonctions polynomiales associées. On note  $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$  la base canonique de  $\mathbb{R}_2[X]$ . On définit les deux applications suivantes :

$$f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$$

$$P \longmapsto \frac{1}{2}[P(\frac{X}{2}) + P(\frac{X+1}{2})]$$

et

$$\varphi : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$P \longmapsto P(1).$$

On rappelle aussi que l'on note  $f^0 = \text{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}$ , et pour tout  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ,  $f^n = f \circ f^{n-1}$ .

1. Vérifier que  $f$  est bien à valeurs dans  $\mathbb{R}_2[X]$  et montrer que  $f$  est linéaire.
2. Montrer que  $\varphi$  est linéaire.
3. Ecrire la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}_2[X]$ , en indiquant les calculs intermédiaires.
4. L'application  $f$  est-elle injective ? Surjective ?
5. Déterminer une base de  $\text{Ker } \varphi$ . Quelle est la dimension de  $\text{Ker } \varphi$  ?
6. L'application  $\varphi$  est-elle injective ? Surjective ?
7. Démontrer, par récurrence sur l'entier  $n$ , que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad f^n(P) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^n}\right).$$

8. En déduire, en utilisant les sommes de Riemann associées à la fonction polynomiale  $P$ , que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(f^n(P)) = \int_0^1 P(t) dt.$$

**Exercice 41. Problème de l'Examen M1-MEEF Toulon-Nice Janvier 2018 (extrait du Concours Communs Polytechniques 2013).**

Soient  $n$  et  $p$  deux entiers naturels non nuls,  $\mathbb{K}$  l'ensemble  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

Notons  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  l'espace vectoriel des matrices à  $n$  lignes et  $p$  colonnes à coefficients dans  $\mathbb{K}$ ,  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre  $n$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$ ,  $0_n$  la matrice nulle d'ordre  $n$  et  $I_n$  la matrice identité d'ordre  $n$ .

Pour  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ , on note :

$$\text{Ker}(M) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid MX = 0\},$$

$$\text{Im}(M) = \{MX, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})\},$$

$$E_\lambda(M) = \text{Ker}(M - \lambda I_n)$$

et

$$\text{Im}_\lambda(M) = \text{Im}(M - \lambda I_n).$$

Soient  $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$  et  $\mathbf{e} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ . On dit que  $\mathbf{e}$  est un vecteur propre commun à  $A$  et  $B$  si :

- (i)  $\mathbf{e} \neq 0$ ;
- (ii) il existe  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que  $A\mathbf{e} = \lambda\mathbf{e}$ ;
- (iii) il existe  $\mu \in \mathbb{K}$  tel que  $B\mathbf{e} = \mu\mathbf{e}$ .

On définit  $[A, B] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  par :  $[A, B] = AB - BA$ .

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -1 \\ -2 & 6 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

On note  $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3)$  où  $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  et  $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . On

note aussi  $u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $u_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ .

1.
  - 1.1. Déterminer le spectre de  $A$ .
  - 1.2. Vérifier que la famille  $\mathcal{F}$  est une base de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  constituée de vecteurs propres de  $A$ .
  - 1.3.  $A$  est-elle diagonalisable ? Quel est son polynôme minimal ?
  - 1.4. Montrer qu'aucun des éléments de  $\mathcal{F}$  n'est un vecteur propre commun à  $A$  et  $B$ .
2.
  - 2.1. Déterminer le spectre de  $B$ .
  - 2.2. Montrer que  $\text{Im}_2(B) = \text{Vect}(u_4)$  et que  $\dim(E_2(B)) = 2$ .
  - 2.3.  $B$  est-elle diagonalisable ? Quel est son polynôme minimal ?
3.
  - 3.1. Montrer que  $E_1(A) \cap E_2(B) = \text{Vect}(u_5)$ .
  - 3.2. Déterminer tous les vecteurs propres communs à  $A$  et  $B$ .
4.
  - 4.1. Vérifier que  $[A, B] = C$ .
  - 4.2. Montrer que  $C$  est semblable à la matrice  $D$  et déterminer le rang de  $C$ .

**Exercice 42. Exercice de l'Examen M1-MEEF Toulon-Nice Janvier 2019 (Extrait du Concours ENSAIT 2003).**

On note  $0_3$  la matrice nulle de  $M_3(\mathbb{C})$  et  $I_3$  la matrice identité. Dans l'espace vectoriel  $\mathbb{C}_3[X]$  des polynômes à une indéterminée à coefficients complexes de degré au plus 3, on note  $\mathcal{B}$  la base canonique  $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ . On considère l'application  $f$  qui à tout polynôme  $P \in \mathbb{C}_3[X]$  associe le polynôme

$$f(P)(X) = \frac{X^2 - 1}{2}P''(X) - XP'(X) + P(X).$$

1. Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathbb{C}_3[X]$ .
2. Ecrire la matrice  $M$  de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$ .
3. Déterminer une base du noyau de  $f$ .
4. Déterminer le rang de  $f$  puis une base de l'image de  $f$ .
5. Le noyau et l'image de  $f$  sont-ils supplémentaires ?
6. Montrer que  $f$  est un projecteur.
7.  $f$  est-il un endomorphisme diagonalisable de  $\mathbb{C}_3[X]$  ?

**Exercice 43. Exercice de l'Examen M1-MEEF Toulon-Nice Janvier 2019 (Extraits du Concours Communs Polytechniques 2008).**

On dit qu'une matrice  $A = (a_{i,j})$  de  $M_3(\mathbb{R})$  est une **matrice à diagonale propre** si son polynôme caractéristique est scindé sur  $\mathbb{R}$  et si ses termes diagonaux sont ses valeurs propres avec le même ordre de multiplicité, c'est-à-dire si le polynôme caractéristique de  $A$  est

$$\chi_A(X) = \prod_{i=1}^3 (a_{i,i} - X).$$

1. Soient  $\alpha$  un réel et

$$M(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \alpha \\ 0 & 2 & -\alpha \\ 1 & 1 & 2 - \alpha \end{pmatrix}.$$

Calculer le polynôme caractéristique de la matrice  $M(\alpha)$ .

2. Démontrer que, pour tout  $\alpha$ , la matrice  $M(\alpha)$  est une matrice à diagonale propre.
3. Quelles sont les valeurs de  $\alpha$  pour lesquelles la matrice  $M(\alpha)$  est diagonalisable ?
4. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice antisymétrique  $A$  est-elle une matrice à diagonale propre ?

**Exercice 44. Exercice de l'Examen M1-MEEF Toulon-Nice Janvier 2019 (Extraits du Concours EPITA 2008).**

On désigne par  $\mathbb{K}$  un corps ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ) et par  $p$  un entier naturel supérieur ou égal à 2. On convient de plus que

• Les vecteurs de l'espace vectoriel  $\mathbb{K}^p$  sont des  $p$ -uplets  $x$  d'éléments de  $\mathbb{K}$  qu'on identifie ici à la matrice-colonne de leurs composantes dans la base canonique  $(e_1, \dots, e_p)$  définie par :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_p = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On note  ${}^t e_1, \dots, {}^t e_p$  les  $p$  matrices-lignes transposées des matrices-colonnes précédentes.

• L'espace vectoriel  $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$  des matrices carrées à coefficients dans le corps  $\mathbb{K}$  est rapporté à sa base canonique  $(E_{i,j}, 1 \leq i, j \leq p)$ ,  $E_{i,j}$  désignant la matrice de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$  dont les éléments sont nuls à l'exception de celui situé à l'intersection de la ligne  $i$  et de la colonne  $j$ , qui vaut 1. Une matrice  $M$  de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$  s'écrit donc

$$M = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p m_{i,j} E_{i,j} = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \cdots & m_{1,p} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & \cdots & m_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{p,1} & m_{p,2} & \cdots & m_{p,p} \end{pmatrix}.$$

1. (a) On considère quatre entiers  $i, h, k, j$  compris entre 1 et  $p$ . Vérifier que le produit  $E_{i,k}E_{k,j}$  vaut  $E_{i,j}$  et que le produit  $E_{i,h}E_{k,j}$  vaut 0 si  $h \neq k$ .
- (b) Etant donné une matrice  $A = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p a_{i,j} E_{i,j}$  et des entiers  $s$  et  $t$  compris entre 1 et  $p$ , calculer les produits  $E_{s,t}A$  et  $AE_{s,t}$ .
- (c) Le but de la question est de déterminer l'ensemble  $C_p(\mathbb{K})$  des matrices  $A$  de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$  telles que

$$\forall M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}), \quad AM = MA.$$

Etant donnés une matrice  $A \in C_p(\mathbb{K})$  et des entiers  $s$  et  $t$  compris entre 1 et  $p$ , quelles conditions imposent l'égalité  $AE_{s,t} = E_{s,t}A$  ?  
En déduire l'égalité  $C_p(\mathbb{K}) = \{\lambda I_p \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$ .

2. On considère une matrice  $A$  de l'espace  $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$  et on étudie l'application  $d_A$  associant à toute matrice  $M$  de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$  la matrice  $d_A(M)$  de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$  définie par :

$$d_A(M) = AM - MA.$$

- (a) Montrer que  $d_A$  est un endomorphisme de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ .  
 (b) L'endomorphisme  $d_A$  est-il injectif ? surjectif ? Dans quel cas est-il nul ?  
 (c) Montrer que l'endomorphisme  $d_A$  vérifie la propriété suivante :

$$\forall M, N \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}), \quad d_A(MN) = d_A(M)N + Md_A(N).$$

3. (a) Démontrer que pour toutes matrices  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ , on a  ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$ .  
 (b) Démontrer que pour toutes matrices  $A$  inversibles de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$  la transposée de  $A$  est inversible et qu'on a  $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$ .  
 4. On suppose dans cette question la matrice  $A$  diagonalisable.  
 (a) Montrer que la matrice  ${}^tA$  transposée de  $A$  est aussi diagonalisable.  
 (b) Montrer que  $A$  et  ${}^tA$  ont le même polynôme caractéristique, donc mêmes valeurs propres.

On désigne alors par  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  les valeurs propres distinctes ou non de  $A$  et  ${}^tA$  et par :

- $\mathcal{V} = (V_1, \dots, V_p)$  une base de vecteurs propres de  $A$  associée à  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ .
- $\mathcal{W} = (W_1, \dots, W_p)$  une base de vecteurs propres de  ${}^tA$  associée à  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ .

- (c) Calculer  ${}^tW_j A$  en fonction de  ${}^tW_j$  pour  $1 \leq j \leq p$  puis calculer  $d_A(V_i {}^tW_j)$  en fonction de  $V_i {}^tW_j$  pour  $1 \leq i, j \leq p$ .

On note  $P$  et  $Q$  les matrices de passage de la base  $(e_1, \dots, e_p)$  à ces bases  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{W}$ , et on considère l'application  $\varphi$  définie de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$  dans lui-même par  $\varphi(M) = PM {}^tQ$ .

- (d) Préciser les produits  $Pe_i$  et  $Qe_j$  pour  $1 \leq i, j \leq p$ . Comparer les matrices  $E_{i,j}$  et  $e_i {}^t e_j$ , et en déduire  $\varphi(E_{i,j})$ .
- (e) Montrer que l'application  $\varphi$  réalise un automorphisme de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ .
- (f) En déduire que la famille  $(V_i {}^tW_j \mid 1 \leq i, j \leq p)$  est une base de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ .
- (g) En déduire que  $d_A$  est diagonalisable, et préciser ses valeurs et vecteurs propres.

**Exercice 45. Problème de l'Examen M1-MEEF Toulon-Nice Janvier 2020 (Extraits du Concours ENSI Physique - Option TA-Math 2 - 1987).**

**Partie A : Propriétés d'un endomorphisme**

Soient  $E$  un  $K$ -espace vectoriel et  $f$  un endomorphisme de  $E$ .

1. Montrer que  $\text{Im } f^2 \subset \text{Im } f$ .
2. Montrer que

$$E = \text{Ker } f + \text{Im } f \iff \text{Im } f^2 = \text{Im } f.$$

3. Si l'on suppose que  $E$  est de dimension finie, montrer que :

$$E = \text{Ker } f + \text{Im } f \iff E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f.$$

**Partie B : Avec des polynômes**

Soit  $\mathbb{R}[X]$  l'espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  des polynômes à une indéterminée à coefficients dans  $\mathbb{R}$ . On considère  $\mathbb{R}_2[X]$  son sous-espace vectoriel constitué des polynômes à une indéterminée à coefficients dans  $\mathbb{R}$  de degré au plus 2, muni de la base canonique  $(1, X, X^2)$ .

Considérons l'application  $f$  suivante :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_2[X] &\longrightarrow \mathbb{R}[X] \\ P &\longmapsto (aX + 1)P + (bX^2 + c)P' \end{aligned}$$

où  $P'$  est le polynôme dérivé du polynôme  $P$  et  $a, b, c$  sont trois réels.

1. Calculer  $f(1)$ ,  $f(X)$  et  $f(X^2)$ . En déduire une condition nécessaire et suffisante sur  $a, b, c$  pour que  $f$  soit à valeurs dans  $\mathbb{R}_2[X]$ .
2. Dans ce cas, déterminer la matrice de  $f$  considérée maintenant comme un endomorphisme, dans la base canonique  $(1, X, X^2)$ .
3. Déterminer le noyau et le rang de  $f$  lorsque  $a = 2$ ,  $b = -1$  et  $c = 0$ . L'endomorphisme est-il diagonalisable dans ce cas ?

**Partie C : Racines carrées d'une matrice ou d'un endomorphisme diagonalisables.**

Dans ce problème,  $m$  est un entier avec  $m \geq 2$ . On désigne par  $\mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ , l'algèbre des matrices carrées d'ordre  $m$  à coefficients complexes. On associera à ces matrices les endomorphismes de  $\mathbb{C}^m$  grâce à la base canonique. L'endomorphisme identité de  $\mathbb{C}^m$  sera notée  $\text{id}$ .

Le but du problème est de discuter, pour  $A$  une matrice dans  $\mathcal{M}_m(\mathbb{C})$  diagonalisable, des solutions de l'équation  $M^2 = A$  avec  $M \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ .

1. Quelques cas particuliers pour bien comprendre le problème.

(a) Dans cette question  $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Donner sans justification 4 matrices distinctes  $M_k$ ,  $k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$  de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$  telles que pour tout  $k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$ ,  $M_k^2 = A$ .

(b) Dans cette question  $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ . On pose, pour  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $M_\alpha =$

$$\begin{pmatrix} 2 & \alpha & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

i. Calculer  $M_\alpha^2$ .

ii. Montrer que pour tout  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $M_\alpha$  est diagonalisable.

(c) Dans cette question  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ . On pose, pour  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $M_\alpha =$

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

i. Calculer  $M_\alpha^2$ .

ii. Montrer que pour tout  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $M_\alpha$  n'est pas diagonalisable.

2. On revient au cas général :  $m \geq 2$  quelconque. On suppose que  $M \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$  est diagonalisable et on pose  $M^2 = A$ . Démontrer que  $A$  est diagonalisable.

3. Prouver que si  $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$  est diagonalisable, alors il existe au moins une matrice diagonalisable  $M \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$  telle que  $M^2 = A$ .  
 Vous pourrez vous servir de la notation  $\text{Diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  qui désigne la matrice diagonale de  $\mathcal{M}_m(\mathbb{C})$  dont les éléments diagonaux sont  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ .
4. Soit  $\varphi$  est un endomorphisme de  $\mathbb{C}^m$ .
- (a) On suppose que  $\mu$  est valeur propre de  $\varphi$ . Démontrer que  $\mu^2$  est une valeur propre de  $\varphi^2 (= \varphi \circ \varphi)$ .
- (b) Un vecteur propre de  $\varphi^2$  est-il nécessairement un vecteur propre de  $\varphi$  ?
5. Pour la suite,  $\varphi$  est un endomorphisme de  $\mathbb{C}^m$ .
- (a) Démontrer l'équivalence entre les quatre propriétés suivantes :
- (1)  $\varphi$  est non injectif ;
- (2) 0 est valeur propre de  $\varphi$  ;
- (3) 0 est valeur propre de  $\varphi^2$  ;
- (4)  $\varphi^2$  est non injectif.
- (b) Soit  $\lambda$  une valeur propre non nulle de  $\varphi^2$  et  $\mu$  un nombre complexe tel que  $\mu^2 = \lambda$ .
- i. Démontrer l'équivalence suivante :
- $$\begin{cases} x = x_1 + x_2 \\ x_1 \in \text{Ker}(\varphi - \mu \text{id}) \\ x_2 \in \text{Ker}(\varphi + \mu \text{id}) \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \left( x + \frac{\varphi(x)}{\mu} \right) \\ x_2 = \frac{1}{2} \left( x - \frac{\varphi(x)}{\mu} \right) \\ x \in \text{Ker}(\varphi^2 - \lambda \text{id}) \end{cases}$$
- ii. En déduire que  $\text{Ker}(\varphi^2 - \lambda \text{id}) = \text{Ker}(\varphi - \mu \text{id}) \oplus \text{Ker}(\varphi + \mu \text{id})$ .
- iii. En déduire que  $\mu$  ou  $-\mu$  (non exclusif) est valeur propre de  $\varphi$ .
- (c) En utilisant les dernières questions, montrer que si  $\varphi^2$  est diagonalisable et si  $\text{Ker} \varphi = \text{Ker} \varphi^2$  alors  $\varphi$  est diagonalisable.
6. Soit  $f$  un endomorphisme de  $\mathbb{C}^m$  diagonalisable. Pour la suite, on vous conseille de raisonner grâce à une base de vecteurs propres de  $f$  et d'utiliser (entre autres) les conclusions de la question 5. Vous pouvez aussi revoir les exemples de la question 1.

- (a) On suppose que  $f$  possède  $m$  valeurs propres distinctes. Démontrer qu'il n'existe qu'un nombre fini d'endomorphismes  $\varphi$  tels que  $\varphi^2 = f$  et qu'ils sont tous diagonalisables.
- (b) On suppose qu'au moins une valeur propre, qu'on appelle  $\lambda$ , a un ordre de multiplicité supérieur ou égal à 2. Soit  $\mu \in \mathbb{C}$  tel que  $\mu^2 = \lambda$ . Soit  $\alpha \in \mathbb{C}$ .
- i. Expliquer pourquoi on a l'existence de  $e_1$  et  $e_2$  deux vecteurs linéairement indépendants de  $\text{Ker}(f - \lambda \text{id})$ .
  - ii. Supposons qu'un endomorphisme  $\varphi$  de  $\mathbb{C}^m$  soit tel que

$$\begin{aligned}\varphi(e_1) &= \mu e_1 \\ \varphi(e_2) &= \alpha e_1 - \mu e_2.\end{aligned}$$

Exprimer  $\varphi^2(e_1)$  et  $\varphi^2(e_2)$  en fonction de  $e_1$  et  $e_2$ .

- iii. En utilisant le résultat de la question précédente, montrer que si  $\lambda \neq 0$  il existe une infinité d'endomorphismes diagonalisables  $\varphi$  tels que  $\varphi^2 = f$ .
- iv. Toujours en utilisant cette même question, montrer que si  $\lambda = 0$ , il existe une infinité d'endomorphismes non diagonalisables  $\varphi$  tels que  $\varphi^2 = f$ .

**Exercice 46. Problème de l'Examen M1-MEEF Toulon-Nice Janvier 2021 (tiré de Préparation aux épreuves écrites du CAPES - Université Claude Bernard Lyon I - 2016/2017).**



———— PARTIE B : Exercices d'application ————

**Exercice 1 :** *Exemple*

On considère la fonction  $u : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie pour tout  $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$  par

$$u(x, y, z, t) = (x + y + 2z - t, x - y - z + t, -x + 5y + 7z - 5t).$$

- 1 - Vérifier que  $u$  est une application linéaire.
- 2 - Donner un encadrement pour  $\dim \ker u$ . L'application  $u$  peut-elle être injective? **(À faire sans calcul)**
- 3 - Donner une base de  $\ker u$ , puis de  $\text{Im } u$ .

**Exercice 2 :** *Injectivité, surjectivité d'une application linéaire en dimensions finies*

Soit une application linéaire  $u : E \rightarrow F$ , où  $E$  et  $F$  sont deux  $K$ -espaces vectoriels de dimensions finies.

- 1 - Montrer que si  $u$  est injective alors  $\dim E \leq \dim F$ .
- 2 - Montrer que si  $u$  est surjective alors  $\dim F \leq \dim E$ .
- 3 - Montrer que si  $\dim E = \dim F$ , alors  $u$  est injective si et seulement si  $u$  est surjective.

**Exercice 3 :** *Exemple en dimension infinie*

On note  $C^\infty([0, 1], \mathbb{R})$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des applications réelles infiniment dérivables sur  $[0, 1]$ .

1 - On considère l'application linéaire  $\varphi : C^\infty([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty([0, 1], \mathbb{R})$  définie pour tout  $f \in C^\infty([0, 1], \mathbb{R})$  par  $\varphi(f) = f'$ .

- (a)  $\varphi$  est-elle injective?
- (b)  $\varphi$  est-elle surjective?
- (c) Que peut-on dire de la dimension de  $C^\infty([0, 1], \mathbb{R})$ ?

2 - On considère l'application linéaire  $\psi : C^\infty([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty([0, 1], \mathbb{R})$  définie pour tout  $f \in C^\infty([0, 1], \mathbb{R})$  par

$$\begin{aligned} \psi(f) : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \int_0^t f(x) dx \end{aligned}$$

- (a)  $\psi$  est-elle injective?
- (b)  $\psi$  est-elle surjective?
- 3 - Calculer  $\varphi \circ \psi$  et  $\psi \circ \varphi$ .

**Tournez SVP**

## PARTIE C : Interpolation de Lagrange

Pour tout entier naturel  $n$ ,  $\mathbb{R}_n[X]$  désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à  $n$ .

Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 2 et soient  $a_1, \dots, a_n$  des réels deux à deux distincts. Pour tout entier  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on considère le polynôme

$$L_k(X) = \prod_{\substack{1 \leq i \leq n, \\ i \neq k}} \frac{X - a_i}{a_k - a_i}.$$

- I. Soit  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Montrer que  $L_k$  est l'unique polynôme  $P$  de  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$  tel que pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,

$$P(a_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k, \\ 1 & \text{si } i = k. \end{cases}$$

II. On considère l'application

$$F : \begin{cases} \mathbb{R}_{n-1}[X] & \rightarrow \mathbb{R}^n \\ P & \mapsto (P(a_1), \dots, P(a_n)). \end{cases}$$

1. Montrer que  $F$  est une application linéaire.
  2. Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ . Pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , montrer qu'il existe un polynôme  $P$  dans  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$  tel que  $F(P) = e_k$ .
  3. Montrer que  $F$  est surjective, puis justifier que  $F$  est bijective.
- III. Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .
1. Montrer qu'il existe un unique polynôme  $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$  tel que pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $P(a_k) = f(a_k)$ . Ce polynôme  $P$  est appelé *polynôme d'interpolation de  $f$  en les points d'abscisses  $a_1, \dots, a_n$* .
  2. Exprimer le polynôme d'interpolation de  $f$  en les points d'abscisses  $a_1, \dots, a_n$  à l'aide des polynômes  $L_1, \dots, L_n$  et des valeurs de  $f$  en  $a_1, \dots, a_n$ .

**FIN DU SUJET**